Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2013

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Naherholungsgebiet

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right)$ mit $a > 0$. Ihre Graphen seien G_a.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an und bestimmen Sie die Nullstelle von f_a.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes von G_a.
Zeigen Sie, dass keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt besitzt.

b) Geben Sie für $a = 3$ das Verhalten der Funktionswerte von f_a und von f_a' für $x \to 0$ an.
Erläutern Sie den Verlauf des Graphen G_3 in der Umgebung von $x = 0$.
Geben Sie für $a = 3$ den Schnittpunkt mit der x-Achse und den Extrempunkt an und zeichnen Sie G_3 in ein geeignetes Koordinatensystem.

Die Orte Altfeld und Burghausen sind durch eine gerade Landstraße verbunden, an der ein gemeinsames Naherholungsgebiet mit 15,19 km^2 Fläche liegt. Das Naherholungsgebiet wird durch die Landstraße und durch einen Fahrweg eingeschlossen, der modellhaft durch den Graphen von G_3 beschrieben werden kann. Die beiden Orte werden durch die Punkte $A(0\,|\,0)$ und $B(10\,|\,0)$ dargestellt, $1\,\text{LE} = 1\,\text{km}$.

c) Von B aus wird ein geradliniger Radweg so gebaut, dass er tangential in den vorhandenen Fahrweg am unteren Rand des Naherholungsgebietes mündet.
Ergänzen Sie den geplanten Radweg in Ihrer Zeichnung aus Aufgabenteil b).
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $C(x_c\,|\,f_3(x_c))$, in dem der Radweg auf den Fahrweg trifft (Angabe gerundet auf eine Nachkommastelle).
Geben Sie dazu geeignete Bedingungen für Ihre Lösung an.
[Zur Kontrolle: $C(6{,}1\,|\,-1{,}8)$]

d) Ein weiterer Radweg verbindet die Orte A und C geradlinig.
Die Gerade durch A und C schneidet jeden Graphen G_a in einem Punkt P_a.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten und seinen Abstand vom Ort A.

e) Der Radweg von A nach C teilt das Naherholungsgebiet in zwei Teilflächen.
Der größere Teil wird als Naturschutzgebiet ausgewiesen.
Berechnen Sie die Fläche des Naturschutzgebietes.
Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Anteil des Naturschutzgebietes am gesamten Naherholungsgebiet beträgt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	10	7	5	7	40

Aufgabe 1.2 CAS: Kettenlinien

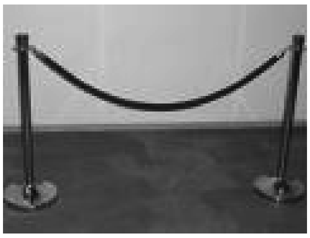
Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^{a\cdot(x-3)} + e^{a\cdot(3-x)}$; $x \in IR$; $a \in IR$, $a \neq 0$.
Ihre Graphen heißen G_a und werden Kettenlinien genannt, weil sie die Form einer hängenden Kette haben.
Hinweis: Der Funktionsterm von f_a ist identisch mit dem Term $2\cosh(a(x-3))$.

a) Untersuchen Sie G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Graphen G_a den gleichen Extrempunkt haben und ermitteln Sie dessen Koordinaten und Art.
Begründen Sie, dass G_a keine Wendepunkte besitzt.

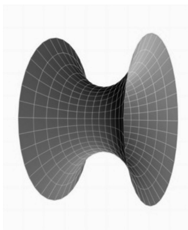
c) Zeichnen Sie $G_{0,5}$ im Intervall $[-1;7]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Im Intervall $[0;6]$ lässt sich $G_{0,5}$ durch eine Parabel zweiten Grades annähern, die im Tiefpunkt und den beiden Randpunkten mit $G_{0,5}$ identisch ist.
Bestimmen Sie für die zu dieser Parabel gehörende Funktion p die Funktionsgleichung. Runden Sie am Schluss die Koeffizienten auf eine Stelle nach dem Komma.

d) Damit sich beispielsweise an Theater- oder Kinokassen geordnete Menschenschlangen bilden, nutzt man verschiebbare und variabel zusammenstellbare Absperrketten oder -seile. Ein Kettensegment besteht aus zwei senkrecht auf dem Fußboden stehenden Pfosten und einer Kette. Der Fußpunkt des linken Pfostens sei der Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit $1\,\text{LE} = 0{,}5\ \text{m}$. Die Kette kann durch $G_{0,2}$ modelliert werden. Bestimmen Sie, in welcher Höhe und unter welchem Winkel die Kette am linken Pfosten befestigt ist.



Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Kette, den beiden Pfosten und der Verbindungsstrecke zwischen den Fußpunkten der Pfosten eingeschlossen wird.

e) Von den Geraden $x = 2$, $x = 4$, der x-Achse und dem Graph einer Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 0{,}5 \cdot f_1(x)$ wird eine Fläche eingeschlossen. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein als Katenoid bezeichneter symmetrischer Körper. Berechnen Sie sein Volumen.



Der Katenoid soll symmetrisch bleiben und so verändert werden, dass er bei Beibehaltung des Funktionsgraphen der Funktion h ungefähr das doppelte Volumen besitzt. Dieser Katenoid soll in einem zylinderförmigen Behälter verpackt werden. Bestimmen Sie für diesen Zylinder die Mindestwerte für Radius und Höhe (gerundet auf drei Nachkommastellen).

f) Eine Kettenlinie ist stets symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse, die durch den Extrempunkt der Kettenlinie verläuft.
Zeichnen Sie die Symmetrieachse sowie zwei Punkte $P_1(x_E + t \mid f_{0,5}(x_E + t))$ und $P_2(x_E - t \mid f_{0,5}(x_E - t))$ mit $t < 3$ in Ihre Darstellung aus Teilaufgabe c) ein und weisen Sie durch Rechnung nach, dass die beschriebene Symmetrie für $G_{0,5}$ gilt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	7	8	8	8	4	40

Aufgabe 2.1 CAS: U-Boote

Vor der Steilküste der griechischen Insel Santorin befinden sich ein ankerndes Kreuzfahrtschiff (siehe Foto) und zwei Forschungs-U-Boote U_1 und U_2 in geradlinig gleichförmiger Unterwasserfahrt.

Die Meeresoberfläche liegt in der *x*-*y*-Ebene.

Das U-Boot U_1 befindet sich um 12:21 Uhr in $P_0(4\,|\,14\,|\,-4)$ und eine Minute später in $P_1(6\,|\,11\,|\,-4)$.
In der gleichen Zeit fährt das U-Boot U_2 von $Q_0(11\,|\,9\,|\,-14)$ nach $Q_1(9\,|\,6\,|\,-12)$, $1\,\text{LE} = 100\text{ m}$.

a) Geben Sie für die Kurse u_1 und u_2 der beiden U-Boote je eine Geradengleichung an.
Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeiten der U-Boote $100 \cdot \sqrt{13}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 361\frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $100 \cdot \sqrt{17}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 412\frac{\text{m}}{\text{min}}$ betragen.
Begründen Sie, dass die beiden Geraden u_1 und u_2 nicht parallel sind und untersuchen Sie, ob sich die beiden U-Boote auf ihren Kursen näher als 500 m kommen könnten.

b) Das Kreuzfahrtschiff ankert im Punkt $K(45\,|\,2\,|\,0)$. Untersuchen Sie, wie weit entfernt vom Kreuzfahrtschiff das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, mit dem U_2 die Meeresoberfläche erreicht.
Berechnen Sie den Abstand der U-Boote zum Zeitpunkt des Auftauchens von U_2.

c) Auf der Steilküste befindet sich eine Forschungsstation im Punkt $F(18\,|\,6\,|\,7)$, zu der von beiden U-Booten live Unterwasseraufnahmen übermittelt werden sollen.
Die Reichweite für diese Übermittlung beträgt 1500 m.
Geben Sie allgemein für einen Punkt $X(x\,|\,y\,|\,z)$ der Geraden u_1 den Abstand zu $F(18\,|\,6\,|\,7)$ an und bestimmen Sie die beiden Punkte auf dem Kurs u_1, für die eine Übertragung gerade noch möglich ist.
Geben Sie das Zeitfenster an, in dem eine Übertragung möglich ist.
Geben Sie den Punkt an, in dem das U-Boot auf dem Kurs u_1 der Forschungsstation am Nächsten kommt und begründen Sie Ihre Angabe.

d) Das auf dem Kurs u_1 fahrende U-Boot erreicht im Punkt $D_1(10\,|\,5\,|\,-4)$ um 12:24 Uhr den geringsten Abstand zum Kurs u_2 des anderen U-Boots. Bestimmen Sie auf dem Kurs u_2 die Koordinaten des Punktes D_2, in dem das U-Boot U_2 den geringsten Abstand zu u_1 hat.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	11	7	4	30

Aufgabe 2.2 CAS: Messerblock

Gegeben sind die Ebene E durch $E:\ 3x+5y+6z=48$, die Geraden der Schar

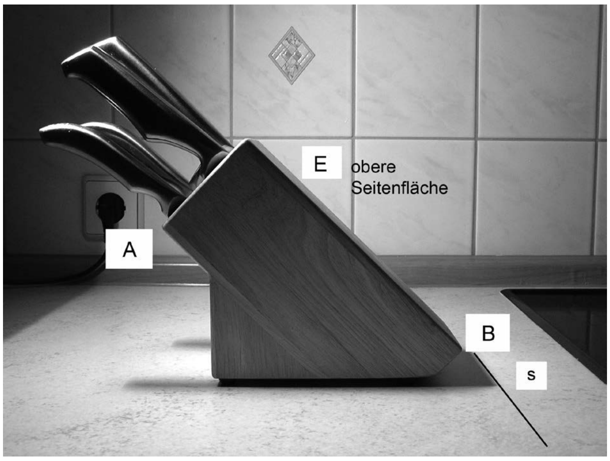
$g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2a+5\\-3\\-a\end{pmatrix};\ t,a\in IR$ und die Gerade $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};\ r\in IR$.

Es gilt: 1 LE = 1 cm.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Geraden g_{-2} windschief verläuft und berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden.
Prüfen Sie, ob der Koordinatenursprung auf h liegt.

b) Die Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene F.
Stellen Sie für F eine Gleichung in Koordinatenform auf.
Ermitteln Sie den Schnittpunkt T der Ebene E und der Geraden h.
Genau eine der Geraden g_a verläuft ebenfalls durch T.
Bestimmen Sie den Parameterwert a für diese Gerade.

Zur Herstellung eines Messerblocks wurde ein quaderförmiger Holzklotz mit quadratischer Grund- und Deckfläche verwendet. An einer Seite wurde ein Teil schräg abgesägt und ein dreiseitiges Prisma aus Holz angeleimt.
Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Arbeitsfläche, auf der der Messerblock steht, in der x-y-Ebene liegt. Der Messerblock steht so, dass seine obere Seitenfläche in E liegt und $A(-11|-11|11)$ und $B(-\frac{1}{17}|\frac{123}{17}|2)$ zwei Eckpunkte des Messerblocks sind (siehe Foto).



c) Eine Flächendiagonale des ursprünglichen Holzquaders verläuft vom Punkt A zum Punkt B. Geben Sie ihre Länge an.
Die Seitenfläche des Messerblocks, in die die Messer gesteckt werden, ist quadratisch. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

d) Auf den Messerblock trifft paralleles Licht, das in Richtung der Messer parallel zur oberen Seitenfläche, die in E liegt, verläuft.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den das einfallende Licht mit der Arbeitsfläche einschließt.
Stellen Sie eine Gleichung einer Geraden s auf, auf der die rechte äußere Grenze des Schattens verläuft.

e) Ermitteln Sie die Höhe des Messerblocks (ohne Messer).

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	6	5	6	4	30

Aufgabe 3.1 CAS: Musikfestival

Beim Open-Air-Musikfest im „Waldstadion“ kauften 60 % der Besucher ihre Eintrittskarten online, 25 % bezogen ihre Karten im Vorverkauf, der Rest der Karten wurde an der Abendkasse verkauft.
Ein Reporter interviewt im Stadion zufällig ausgewählte Besucher und stellt dabei auch Fragen nach der Herkunft der gekauften Karten.

a) Bestimmen Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   A: Zwei interviewte Besucher haben beide ihre Karten online gekauft.
   B: Die Hälfte von 10 Interviewten haben ihre Karten online gekauft.
   C: Mindestens sieben von 10 Interviewten haben ihre Karte online gekauft.
   D: Unter 10 Interviewten ist keiner, der seine Karte an der Abendkasse gekauft hat.

b) Der Reporter möchte nun mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens zwei Besucher finden, die ihre Karte an der Abendkasse gekauft haben.
   Ermitteln Sie, wie viele Besucher er dazu mindestens interviewen muss.

c) Unter den online gekauften Karten liegt der Anteil der von Frauen gekauften Karten bei 45 %. Der Anteil der Frauen unter allen gezählten Besuchern liegt bei 35 %.

   Stellen Sie diesen Sachverhalt geeignet dar (Baumdiagramm, Vierfeldertafel o. ä.)

   Der Reporter hat für sein Interview eine Person ausgewählt.
   - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person eine Frau ist, die ihre Karte online gekauft hat.
   - Die ausgewählte Person ist eine Frau. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Frau ihre Karte online gekauft hat.

d) Vor der letzten Zugabe verlassen voneinander unabhängig insgesamt 8 % der Besucher das Waldstadion. Im mittleren Rang hatten zuvor 550 Besucher gesessen.

   Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der letzten Zugabe dort noch höchstens 500 Besucher sitzen.

e) Vor dem Verkauf wurden 30 Eintrittskarten blau und 20 Eintrittskarten rot markiert.
   Am Schluss des Konzertes werden die Besitzer farbig markierter Eintrittskarten auf die Bühne gebeten. Insgesamt kommen jedoch nur acht auf die Bühne.
   Mit einem großen (Laplace-) Würfel, bei dem 3 Seiten blau und 3 Seiten rot gefärbt sind, soll mit einem Wurf entschieden werden, welche Farbe Freikarten für das nächste Konzert gewinnt.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als vier Besitzer farbiger Karten je eine Freikarte gewinnen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	9	4	5	30

Aufgabe 3.2 CAS: Energiesparlampen

Zwei Firmen F_1 und F_2 stellen Energiesparlampen (im Folgenden „Lampen“ genannt) mit unterschiedlichen Ausschussquoten her: F_1: 9 % und F_2: 7 %.

a) Der laufenden Produktion von F_1 werden zufällig Lampen zur Qualitätsprüfung entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: Unter zwanzig entnommenen Lampen befinden sich mindestens zwei unbrauchbare.
   B: Unter zehn entnommenen Lampen befinden sich mehr brauchbare als unbrauchbare.
   C: Unter 1100 ausgewählten Lampen befinden sich mindestens 971 und höchstens 998, die funktionstüchtig sind.

b) Ein Händler erhält von der Firma F_2 Lampen, die in Kartons mit jeweils 30 Stück verpackt sind. Der Händler wählt aus jedem Karton zufällig zwei Lampen aus (ohne sie wieder zurückzulegen) und überprüft diese. Wenn diese beiden Lampen funktionstüchtig sind, nimmt er den Karton an, sonst schickt er ihn zurück.
   (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler einen Karton annimmt, wenn dieser sechs defekte Lampen enthält.
   (2) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Annahmewahrscheinlichkeit mindestens 0,5 beträgt.

c) Ein Discounter, der Lampen zum Verkauf anbietet, bezieht diese von F_1 und F_2. Dabei werden 35 % des Bedarfs von F_1 und 65 % von F_2 bezogen. Der Einkaufspreis einer von F_1 hergestellten Lampe beträgt 0,98 € und einer von F_2 produzierten Lampe 1,02 €. Der Discounter bietet die Lampen für 1,49 € zum Verkauf an. Ist die verkaufte Lampe defekt, so wird der Verkaufspreis dem Kunden zurückerstattet.

   Die Zufallsgröße G beschreibt den möglichen Gewinn ($G > 0$) bzw. Verlust ($G < 0$) pro verkaufter Lampe für den Discounter in Euro; dabei sind g_i die möglichen Werte von G. Bestimmen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der unten stehenden Tabelle. Ermitteln Sie den Erwartungswert von G.

g_i	–1,02	– 0,98	0,47	0,51
$P(G = g_i)$				

d) Bei der Produktion von Lampen in einer dritten Firma F_3 können zwei Fehler auftreten: Fehler im „Leuchtsystem" (L) und Fehler im „Schraubmechanismus" (S).

   Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Fehlers S beträgt 0,02, die für das gleichzeitige Auftreten beider Fehler 0,001 und die dafür, dass mindestens einer der beiden Fehler auftritt, 0,069.

   Untersuchen Sie, ob beide Fehler L und S (stochastisch) unabhängig voneinander auftreten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	11	7	8	4	30