Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2015

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

---

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Kelchglas

In der Abbildung 1 ist ein Trinkglas in Kelchform ohne Stiel und Fuß dargestellt.
Die seitliche Profillinie eines solchen Glases lässt sich mathematisch mithilfe einer Exponentialfunktion *f* der Form

$f(x) = -a \cdot e^{-bx^2}$ modellieren, $a, b \in I\!R$, $a > 0$, $b > 0$.
Das Koordinatensystem wird gemäß der Abbildung 1 festgelegt, für die Achseneinheiten gilt: 1 LE = 1 cm.

Die Profillinie des Glases ändert ihr Krümmungsverhalten bei $x = -2$ und bei $x = 2$. Außerdem ist ein Tiefpunkt $T(0 \mid -12)$ erkennbar.

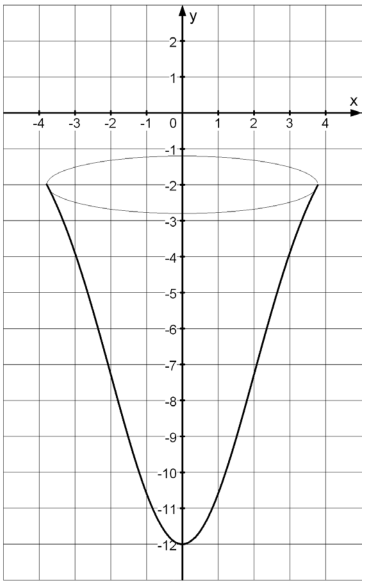


Abbildung 1

a) Untersuchen Sie die Graphen aller möglichen Funktionen *f* in Abhängigkeit von *a* und *b* auf relative Extrempunkte und deren Art sowie auf Wendepunkte.

   Weisen Sie nach, dass *f* für x < 0 streng monoton fallend ist.

b) Geben Sie alle Bedingungen an, die von der Funktion *f* erfüllt werden müssen, damit der Graph von *f* die Profillinie des Glases darstellen kann.

   Stellen Sie die zugehörigen Bedingungsgleichungen auf.
   Berechnen Sie die Parameter *a* und *b* für die Profillinie.

   [Kontrollergebnis: $f_{Glas}(x) = -12 \cdot e^{-0{,}125x^2}$]

   Das Kelchglas hat eine Höhe von 10 cm.
   Berechnen Sie den Umfang und die Größe der Kreisfläche der Öffnung.

c) Bestimmen Sie für die Profillinie des Glases die Gleichungen der zwei Wendetangenten.

   Bestimmen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunkts und die Größe ihres Schnittwinkels.

d) Für $x \geq 0$ ist der Graph von f_{Glas} in der Anlage eingezeichnet. Für $x \geq 0$ besitzt f_{Glas} eine Umkehrfunktion f^*_{Glas}.
   Zeichnen Sie als Spiegelachse die Gerade zu $y = x$ in die Anlage ein und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion f^*_{Glas}.

e) Bestimmen Sie eine Gleichung für f^*_{Glas}.

   Ermitteln und begründen Sie den Definitionsbereich von f^*_{Glas}.

   Der Graph von f^*_{Glas} rotiert für $-12 \leq x \leq -2$ um die *x*-Achse. Dabei entsteht als Rotationskörper das Kelchglas in waagerechter Lage (siehe Abbildung 2).
   Berechnen Sie das Volumen des Glases.

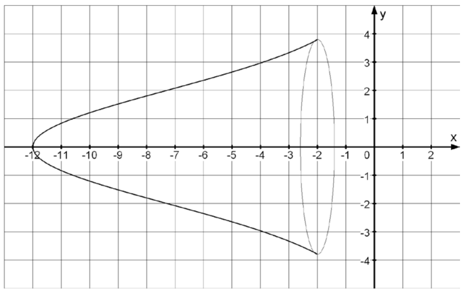
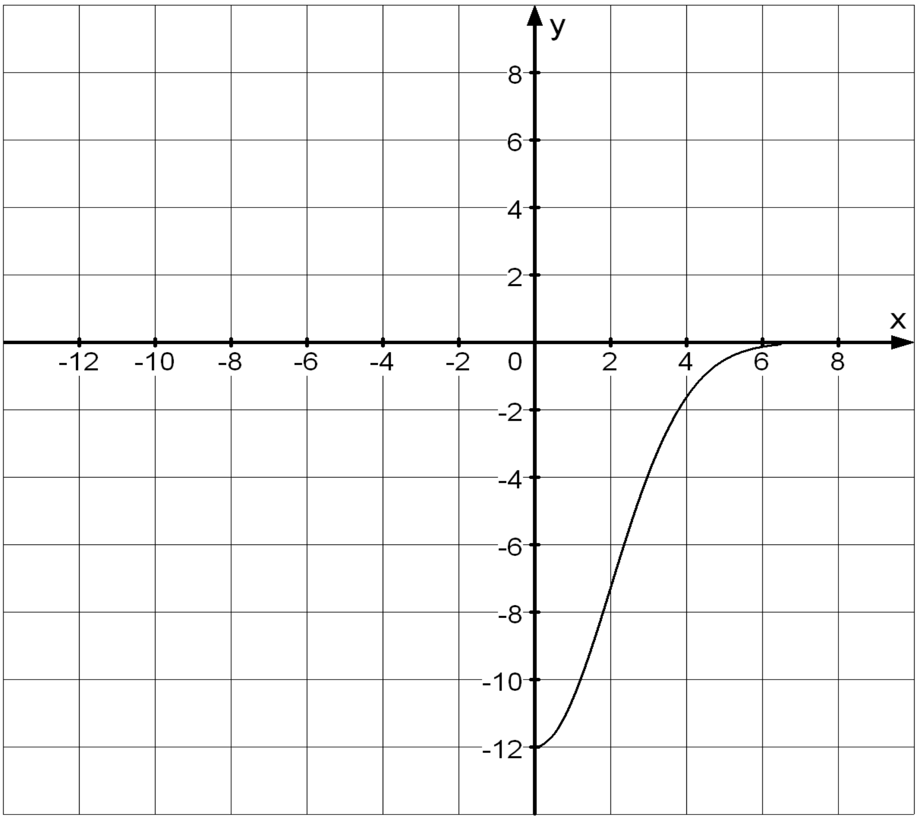


Abbildung 2

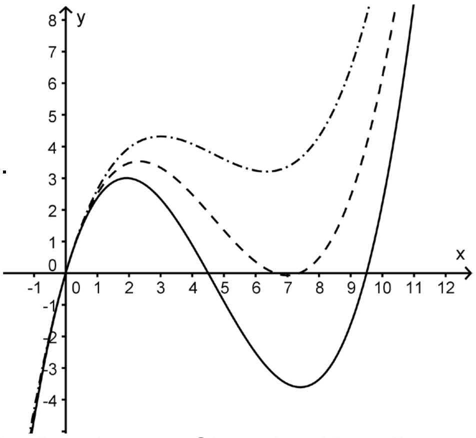
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	10	8	10	4	8	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Kelchglas



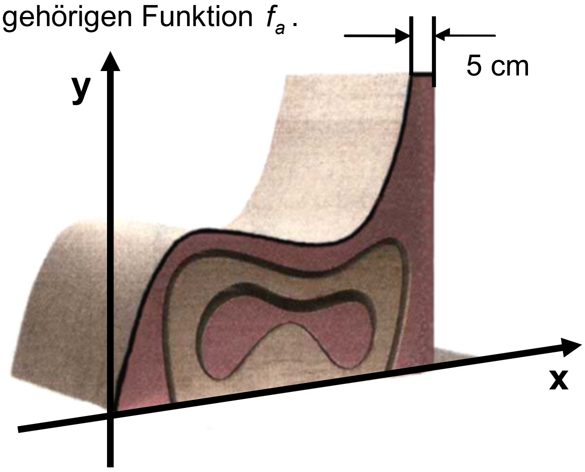
Aufgabe 1.2 CAS: Designersessel



Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit
$f_a(x) = ax^3 - 14ax^2 + 3{,}42x$; $a \in IR, a > 0$.
Drei Graphen der Schar sind in der Abbildung dargestellt.

a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar bei $x_n = 0$ dieselbe Steigung haben.
Einer der Graphen der Schar hat außer $x_n = 0$ genau eine weitere Nullstelle.
Berechnen Sie den Parameterwert dieser Funktion gerundet auf zwei Nachkommastellen.

b) Jeder Graph der Schar hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie seine Koordinaten und weisen Sie damit nach, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur *y*-Achse liegen. Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.
Einer der Graphen der Schar hat an der Stelle $x_e = 3$ einen Extrempunkt.
Weisen Sie nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Funktion f_a.



Der abgebildete Designersessel hat Seitenflächen, die für $0 \le x \le 9$ aus der Fläche unter dem Graphen von $f_{0,06}$ der gegebenen Funktionenschar (oberster Graph in der oberen Abbildung) und für $9 < x \le 9{,}5$ aus einem angesetzten Rechteck von 5 cm Breite bestehen (1 LE = 10 cm).

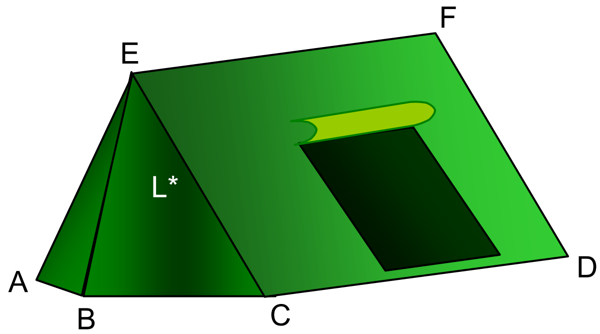
c) Bestimmen Sie die Gesamthöhe des Sessels und ermitteln Sie, wie hoch der Sessel an der niedrigsten Stelle der Sitzfläche ist (Angabe in cm).

d) Berechnen Sie die Größe der in der Abbildung sichtbaren Seitenfläche (Angabe in m^2). Diese Seitenfläche enthält auch die 5 cm breite Rechteckfläche am hinteren Rand.
Die Seitenfläche soll grafisch neu gestaltet werden. Für die Grafik wird ein achsenparalleles Rechteck benötigt, das 32 cm hoch und möglichst breit sein soll. Berechnen Sie die maximale Breite und geben Sie an, welchen prozentualen Anteil die Rechteckfläche an der Seitenfläche hat.

e) Für jede Stelle x_1 im Fußbereich ($x_1 < 3$) gibt es eine Stelle x_2 im Lehnenbereich ($x_2 > 6{,}3$) mit gleicher Steigung.
Ermitteln Sie für zwei solche Paare von Stellen x_1 und x_2 die Summe $x_1 + x_2$.
Weisen Sie für $f_{0,06}$ nach, dass für je zwei *x*-Werte x_1 und x_2, bei denen die Steigung gleich ist, die Summe $x_1 + x_2$ immer den gleichen Wert hat.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	11	5	8	8	40

Aufgabe 2.1 CAS: Campingzelt



Im Bild ist ein Campingzelt mit fünfeckiger Grundfläche dargestellt, von dem die Punkte $A(3\,|\,4\,|\,0)$, $B(4\,|\,3{,}5\,|\,0)$, $C(5\,|\,4\,|\,0)$, $D(5\,|\,6{,}5\,|\,0)$ und $E(4\,|\,4\,|\,1{,}5)$ gegeben sind (Skizze nicht maßstabsgerecht, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$).
Die Punkte *E* und *F* sind Anfangs- und Endpunkt der zum Erdboden parallel verlaufenden oberen Zeltkante.
Das Zelt hat eine Höhe von 1,50 Metern und ist symmetrisch zur Ebene durch die Punkte *E*, *B* und *F*.

a) Die fünfeckige Grundfläche dieses Zeltes wird von dem gleichschenkligen Dreieck *ABC* und dem Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$ gebildet.
Ermitteln Sie die Größe der Grundfläche.

b) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene H, in der die Zeltfläche *BCE* dieses Zeltes liegt.
[Kontrollergebnis für $H:\ -3x + 6y - 2z = 9$]

c) Im Punkt $L(7{,}25\,|\,-0{,}625\,|\,9{,}75)$ ist ein punktförmig gedachter Lautsprecher installiert, der auf der Zeltfläche *BCE* den Schattenpunkt *L** erzeugt.
Die einfallenden Sonnenstrahlen werden vereinfacht als parallel angenommen und verlaufen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *L** sowie die Größe des Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Zeltfläche *BCE* treffen.

d) Die obere Kante der „Eingangsöffnung des Zeltes" liegt in der Ebene *CDFE* und verläuft im Abstand von 50 Zentimetern parallel zur Zeltkante $\overline{EF}$.
Prüfen Sie, ob ein Kind mit $1{,}15\ \text{m}$ Körpergröße aufrecht, also ohne sich bücken zu müssen, durch diesen Eingang gehen kann.

e) Im Inneren des Zeltes haben die Camper eine kleine Lampe aufgehängt. Diese befindet sich genau $25\,\text{cm}$ unter dem Mittelpunkt der Zeltkante $\overline{EF}$ mit $F(4\,|\,6{,}5\,|\,1{,}5)$.
Prüfen Sie, ob der Sicherheitsabstand von $0{,}2\ \text{m}$ zur Zeltfläche *CDFE* eingehalten wird.

f) Eines der 3,8 m langen Spannseile wird im Punkt *E* und mit einem Hering (Befestigungshaken) am Seilende im Erdboden verankert.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes *M* und den Radius *r* des auf dem Erdboden liegenden Kreisbogens, auf dem der Hering im Erdboden verankert werden kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	4	6	4	6	3	30

Aufgabe 2.2 CAS: Berliner Gaslaterne

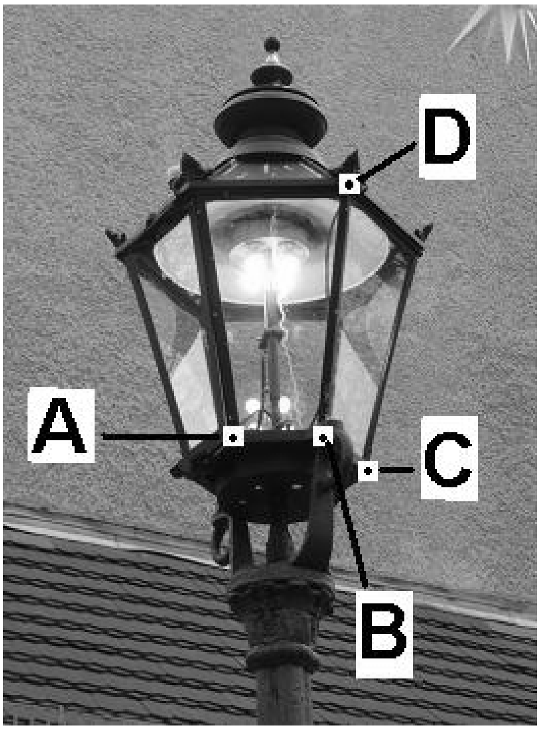
In Berlin gibt es so genannte Schinkellaternen, die zum Teil noch mit Gas betrieben werden (siehe Foto 1).

Der verglaste Laternenkopf ist ein (umgedrehter) regelmäßiger, sechsseitiger Pyramidenstumpf mit pyramidenförmiger Abdeckung. Die Zierelemente werden nicht beachtet.

Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass der Laternenfuß im Punkt $O(0|0|0)$ liegt. Die Gehwegfläche entspricht der x-y-Ebene.

Von folgenden Eckpunkten des Pyramidenstumpfes (siehe Foto 2) sind die Koordinaten bekannt:
$A(7\,|\,-7\sqrt{3}\,|\,320)$, $B(14\,|\,0\,|\,320)$,
$C(7\,|\,7\sqrt{3}\,|\,320)$, $D(24\,|\,0\,|\,360)$.
1 LE = 1 cm.

(Foto 1)



(Foto 2)

a) Die Geraden, auf denen die schrägen Kanten des verglasten Laternenkopfes liegen, schneiden sich in einem Punkt auf der z-Achse. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

b) Die Glasscheibe mit den Eckpunkten A, B und D liegt in einer Ebene E_1.
Die Glasscheibe mit den Eckpunkten B, C und D liegt in der Ebene
$E_2:\ -4\sqrt{3}\cdot x - 4\cdot y + \sqrt{3}\cdot z = 264\cdot\sqrt{3}$.
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 und geben Sie den Winkel an, den zwei benachbarte Glasscheiben miteinander bilden.

c) Im Punkt $L(0\,|\,0\,|\,360)$ befindet sich die punktförmig gedachte Lichtquelle.
Berechnen Sie den Abstand der Ebene E_2 von der Lichtquelle.

In der x-y-Ebene entsteht eine Schattenfläche der von L aus beleuchteten, sechseckigen Grundfläche des Laternenkopfes.
Berechnen Sie die Koordinaten des zu A gehörenden Schattenpunktes A'.

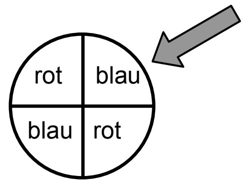
d) Zur Kontrolle der Lichtintensität werden Messungen im Abstand von 3 m zur Lichtquelle vorgenommen.
Geben Sie eine Gleichung der Kugel K an, auf der die Messpunkte liegen.

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Kugel mit der Strecke $\overline{OL}$ an.

e) In den anfangs beschriebenen regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpf wird eine Kugel einbeschrieben. Bestimmen Sie den Radius, den diese Kugel maximal besitzen darf. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	8	9	4	4	30

Aufgabe 3.1 CAS: Glücksrad



Marc und Jannik haben sich folgendes Glücksspiel mit dem nebenstehend skizzierten Glücksrad ausgedacht:

Sie drehen abwechselnd je zweimal das Glücksrad.

- Marc gewinnt (und Jannik verliert), wenn insgesamt zweimal „rot“ erscheint und die anderen beiden Male „blau“.
- Jannik gewinnt (und Marc verliert), wenn genau dreimal „rot“ erscheint und nur einmal „blau“ oder umgekehrt genau dreimal „blau“ erscheint und nur einmal „rot“.
- In den übrigen Fällen endet das Spiel unentschieden.

a) Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für Marc und die für Jannik.
[Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $P(M) = 0{,}375;\ P(J) = 0{,}5$]

b) Am ersten Ferientag spielen die beiden um Geld. Jannik setzt pro Spiel 1 € und Marc 80 Cent. Der Gewinner erhält beide Einsätze, im unentschiedenen Fall erhält jeder seinen Einsatz zurück.
Berechnen Sie Janniks mittleren Gewinn pro Spiel.

c) Nun wird das Ereignis *G* untersucht.

G: Die beiden ersten Drehungen zeigen die gleiche Farbe („rot-rot“ oder „blau-blau“).

Jannik schlägt vor, das Spiel nur dann zu Ende zu spielen und zu werten, wenn das Ereignis *G* eingetreten ist; andernfalls wird das Spiel abgebrochen, es gewinnt keiner und die Einsätze werden zurückgegeben.

- Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für Jannik unter der Bedingung *G*.
- Ermitteln Sie die neue Gewinnwahrscheinlichkeit von Marc und beraten Sie ihn, ob er dieser neuen Regelung zustimmen sollte.

Marc und Jannik spielen das ursprüngliche Spiel jetzt mehrmals hintereinander.
Die Gewinnregeln bleiben unverändert.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Jannik gewinnt von 10 Spielen jedes Spiel.

B: Jannik gewinnt von 10 Spielen mindestens fünf Spiele.

e) Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spiele, die die beiden Jungen spielen müssen, damit Jannik mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95 % mindestens ein Spiel gewinnt.

Die Anzahl der Spiele wird auf 400 festgesetzt. Jannik möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mehr als *k* Spiele gewinnen.
Ermitteln Sie das größtmögliche *k* (gegebenenfalls durch systematisches Probieren).

f) Bei einem neuen Spiel werden die Regeln so verändert, dass Jannik die unbekannte Gewinnwahrscheinlichkeit *p* hat. Es wird insgesamt zehnmal gespielt, davon viermal am Vormittag und sechsmal am Nachmittag.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von *p* eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jannik genau zwei der vier Vormittagsspiele und genau drei der sechs Nachmittagsspiele gewinnt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	4	5	4	7	5	30

Aufgabe 3.2 CAS: „Vorsorgemuffel“

Zu „Vorsorgemuffeln“ zählen Bundesbürger, die nicht regelmäßig eine Zahnarztpraxis zu Kontrolluntersuchungen aufsuchen. Nach einer Umfrage des Instituts der Deutschen Zahnärzte (2013) zählen dazu 29,3 % der weiblichen und sogar 44,7 % der männlichen Bundesbürger.
Unabhängig davon, ob er ein „Vorsorgemuffel“ ist oder nicht, geht im Mittel jeder sechste Bundesbürger bei akuten Beschwerden sofort zu einem Zahnarzt.

Wenn nicht ausdrücklich von männlichen oder weiblichen Bundesbürgern die Rede ist, sind immer alle Bundesbürger unabhängig vom Geschlecht gemeint.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich acht oder neun „Vorsorgemuffel“.

B: Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 15 und weniger als 29 Personen zu denjenigen, die einen Zahnarzt bei akuten Beschwerden sofort aufsuchen.

C: Unter 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befinden sich mindestens 85 Personen, die bei akuten Beschwerden nicht sofort zum Zahnarzt gehen.

Bei einer Befragung von n männlichen Personen soll sich als Erwartungswert für die Anzahl der männlichen „Vorsorgemuffel“ 100 ergeben.
Bestimmen Sie den Wert für n, der diese Bedingung am besten erfüllt.

b) Berechnen Sie, wie viele weibliche Bundesbürger ausgewählt werden dürften, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, wenigstens einen „Vorsorgemuffel“ zu entdecken, mindestens 70 % und höchstens 99 % beträgt.

c) Nacheinander wurden zufällig ausgewählte männliche Bundesbürger befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens der fünfte Befragte ein „Vorsorgemuffel“ war.

d) Der Anteil der Männer unter allen Bundesbürgern liegt bei 48,88 % (Zensus 2011). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unter allen Bundesbürgern zufällig ausgewählter Bundesbürger kein „Vorsorgemuffel“ ist, also regelmäßig zur zahnärztlichen Kontrolluntersuchung geht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass eine aus der Gruppe der „Vorsorgemuffel“ zufällig ausgewählte Person eine Frau ist.

e) In einem Landesteil Deutschlands beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Einwohner „Vorsorgemuffel“ ist, p mit $0 < p < 1$.
Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter vier zufällig ausgewählten Einwohnern dieses Landesteiles ein oder zwei „Vorsorgemuffel“ befinden, maximal ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	3	8	4	30