**Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2018**

# Mathematik

## Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

## mit CAS

**Aufgabenvorschlag Teil 1 für Prüflinge**

| | |
|---|---|
| **Hilfsmittel:** | Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache |
| nicht für Aufgabenstellung 1: | Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist |
| | CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist |
| **Gesamtbearbeitungszeit:** | 270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit |

### Aufgabenstellung 1

**Thema/Inhalt:** hilfsmittelfreier Teil

**Hinweis:** Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden spätestens nach 40 Minuten abgegeben. Eine frühere Abgabe ist möglich.
Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgabenstellung 1 kann mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen begonnen werden. Nachdem die bearbeitete Aufgabenstellung 1 von allen Prüflingen abgegeben wurde, spätestens nach Ablauf der 40 Minuten, können die zugelassenen Hilfsmittel verwendet werden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

### Aufgabenstellung 2

**Thema/Inhalt:** Analysis

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 3

**Thema/Inhalt:** Analytische Geometrie

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 4

**Thema/Inhalt:** Stochastik

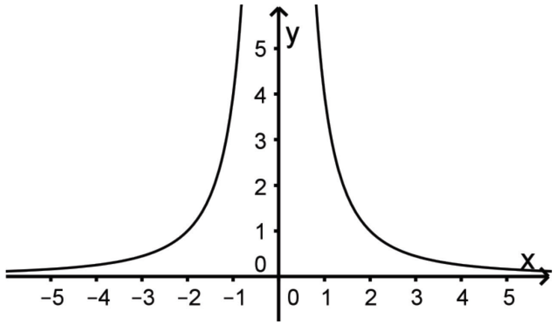
**Hinweis:** Wenn Sie Aufgabe 3.1 gewählt haben, müssen Sie Aufgabe 4.1 wählen!

Wenn Sie Aufgabe 3.2 gewählt haben, müssen Sie Aufgabe 4.2 wählen!

# 1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

## 1.1 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ der in $IR\setminus\{0\}$ definierten Funktion $f$ mit $f(x) = 4 \cdot x^{-2}$.
$G_f$ ist symmetrisch bezüglich der $y$-Achse.




a) Die Gerade, die parallel zur $x$-Achse durch den Punkt $P(0 \mid p)$ verläuft, schneidet $G_f$ in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte hat die Länge 1. Berechnen Sie den Wert von $p$.

b) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an $G_f$ in einem Punkt $Q(u \mid f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von $Q$.

## 1.2 Analytische Geometrie

Der Punkt $P(0 \mid 1 \mid 5)$ ist Eckpunkt eines Quadrates. Orthogonal zu der Ebene in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g$ mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in IR$.

a) Begründen Sie, dass das Quadrat in der $y$-$z$-Ebene liegt.

b) Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrates liegt auf der Geraden $g$, der Punkt $Q(0 \mid 8 \mid 4)$ in der $y$-$z$-Ebene. Zeigen Sie, dass $Q$ einer der beiden Eckpunkte des Quadrates ist, die dem Eckpunkt $P$ benachbart sind.

## 1.3 Stochastik

Ein Landwirt möchte zu seinem Hoffest ein Glücksrad mit blauen, gelben und roten 6°-Sektoren anbieten. Für einen Preis von einem Euro darf man einmal drehen.
Dreht man gelb, erhält man einen Gutschein für eine Packung Bio-Eier, bei blau gibt es als Hauptgewinn einen Ökokorb mit landwirtschaftlichen Produkten und bei rot geht man leer aus.
Eine Packung Bio-Eier kostet dem Landwirt 1,50 € und ein Ökokorb 15 €.
Die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Hauptgewinnes soll 5 % betragen, während die Chance auf den Gewinn eines Gutscheins bei einem Drittel liegen soll.

a) Ermitteln Sie, wie viele blaue, gelbe und rote 6°-Sektoren das Glücksrad haben muss.

b) Bestimmen Sie, welche Kosten dem Landwirt pro Dreh "auf lange Sicht" entstehen.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilgebiet | Analysis | | Geometrie | | Stochastik | | |
| Teilaufgabe | a) | b) | a) | b) | a) | b) | Summe |
| BE | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 15 |

**Zentrale schriftliche Abiturprüfung** **2018**

# Mathematik

## Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

## mit CAS

**Aufgabenvorschlag** **Teil 2** **für Prüflinge**

| | |
|---|---|
| **Hilfsmittel:** | Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache<br>Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist<br>CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist |

### Aufgabenstellung 2

**Thema/Inhalt:** Analysis

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 3

**Thema/Inhalt:** Analytische Geometrie

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 4

**Thema/Inhalt:** Stochastik

**Hinweis:** Wenn Sie Aufgabe 3.1 gewählt haben, müssen Sie Aufgabe 4.1 wählen!

Wenn Sie Aufgabe 3.2 gewählt haben, müssen Sie Aufgabe 4.2 wählen!

**Aufgabe 2.1 CAS: Vase**

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^{0,5 - x}; a \in I\!R$.
Die Graphen der Schar sind $G_a$.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von $f_a$ in Abhängigkeit von $a$.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von $f_a$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

b) Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen $G_a$ mit der *y*-Achse an.
In der Abbildung 1 sind für ganzzahlige Parameterwerte $a$ zwei Graphen der Funktionenschar $f_a$ dargestellt.
Ermitteln Sie die Parameterwerte und beschriften Sie die Graphen.

c) Die Graphen $G_2$ und $G_0$, die *y*-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt *A* dieser Fläche.

d) Weisen Sie nach, dass die Graphen $G_a$ der Funktionenschar $f_a$ für $a > 1$ keine Extrempunkte besitzen.

e) Weisen Sie nach, dass gilt: $f_2''(x) = (x-2)^2 e^{0,5-x}$.
Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen daraus über den Verlauf des Graphen $G_2$ gezogen werden können.

f) Der Graph $G_2$ verläuft im Intervall $[1;3]$ annähernd geradlinig und kann vereinfacht durch die Tangente $t$ an diesen Graphen in $x = 2$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente $t$.
[Zur Kontrolle: $t(x) = -2 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 10 \cdot e^{-1,5}$]
Zeigen Sie, dass der Funktionswert der Tangente $t$ an der Stelle $x = 1$ um weniger als 2 % vom Funktionswert von $f_2$ an dieser Stelle abweicht.

Der Graph $G_{0,65}$ der Funktion $f_{0,65}$ schließt über dem Intervall $[0;3]$ mit der *x*-Achse eine Fläche ein (siehe Abbildung 2).
Durch Rotation dieser Fläche um die *x*-Achse entsteht ein Körper, der modellhaft einer auf der Seite liegenden und nach links geöffneten Vase entspricht. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{dm}$.

g) Die Vase nimmt an zwei verschiedenen Stellen einen maximalen Radius von ca. 1,07 dm an. Ermitteln Sie diese beiden Stellen rechnerisch.

h) Berechnen Sie das Fassungsvermögen der Vase in Liter, wenn der Materialanteil am gesamten Volumen der Vase 10 % beträgt.

**Fortsetzung auf der nächsten Seite**

**Aufgabe 2.1 CAS: Vase (Fortsetzung)**

i) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion $b(t)=\pi\cdot\int\limits_{3-t}^{3}((f_{0,65}(x))^2\,dx$ .

j) Die Vase soll stehend in einem Karton verpackt werden, der die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas besitzt. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Radius der Vase und der Grundfläche des Kartons mit Hilfe einer Skizze und einer Gleichung dar.
Ermitteln Sie, welches Volumen (in cm³) dieser Karton mindestens haben muss.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | h) | i) | j) | Summe |
| BE | 8 | 3 | 3 | 5 | 7 | 5 | 5 | 5 | 2 | 7 | 50 |

**Anlage zu 2.1: Vase**

Abbildung 1

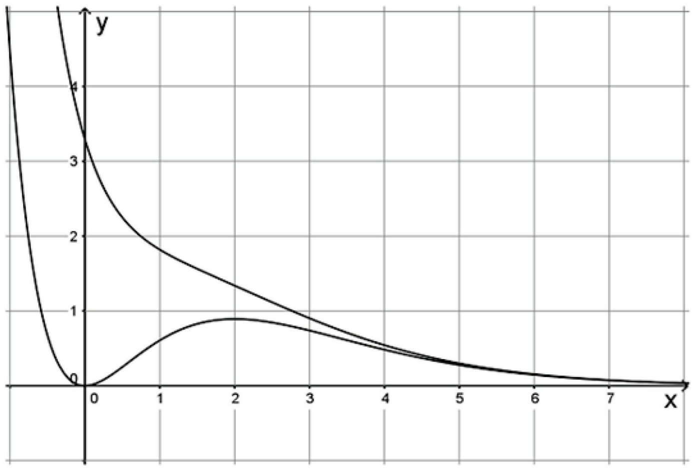
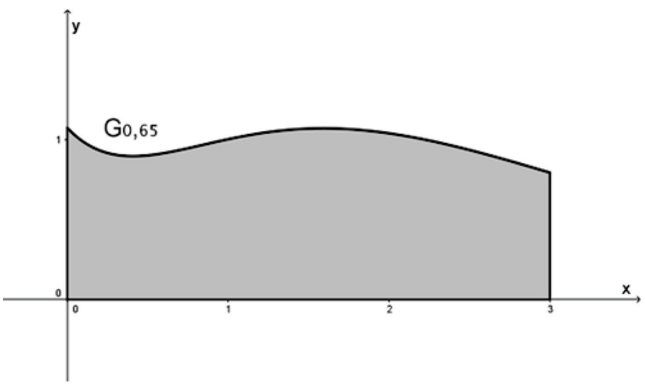



Abbildung 2



**Aufgabe 2.2 CAS: Gartenteich**

Gegeben sind die Funktionenschar $f_a$ mit $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 3x^2 + 5x + 2a$; $x \in IR$, $a \in IR$, $a \neq 0$

und die Funktion $h$ mit $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3}$ ; $x \in IR$, $x \neq 0$.

Die zugehörigen Graphen sind $G_a$ und $K$.

a) Geben Sie die für den Graphen $K$ vorliegende Symmetrie an und begründen Sie diese.
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von $h$ für $x \to +\infty$.
Begründen Sie, dass es keine reelle Zahl $a$ gibt, sodass gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$.

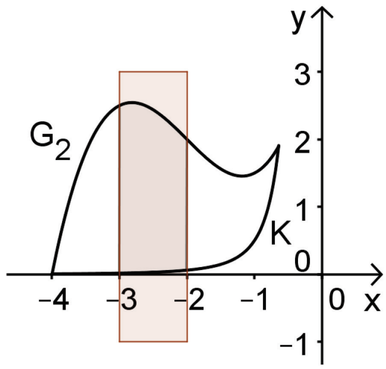
b) Die Tangente an $K$ im Punkt $P(-1 \mid h(-1))$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Begründen Sie, dass der Graph $K$ keine lokalen Extrempunkte besitzt.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten von zwei Punkten des Graphen $G_2$, in denen die Tangenten an den Graphen $G_2$ den Anstieg $m = 1{,}5$ haben.

e) Es gibt einen Wert des Parameters $a$, für den der Graph $G_a$ genau einen Punkt mit waagerechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie diesen Parameterwert.
Erläutern Sie, wie Sie nachweisen könnten, dass der Graph $G_a$ für diesen Parameterwert einen Sattelpunkt besitzt.

Ein Gartenbesitzer hat sich in einer Ecke seines Gartens einen Teich angelegt. Der Rand dieses Teiches an der Wasseroberfläche wird durch die Graphen $G_2$ und $K$ modelliert. Im Intervall $-3 \leq x \leq -2$ verläuft eine Brücke über den Teich, $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$.
In der nebenstehenden Darstellung sind die Teichoberfläche und die Brücke senkrecht von oben betrachtet dargestellt.




f) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen $G_2$ und $K$. Runden Sie die Werte auf zwei Nachkommastellen.
Der Gartenteich wird kurzzeitig durch eine rechteckige Plane abgedeckt. Die Seiten dieser Plane liegen parallel zu den Koordinatenachsen.
Berechnen Sie die Seitenlängen, die diese Plane mindestens haben muss.

**Fortsetzung auf der nächsten Seite**

**Aufgabe 2.2 CAS: Gartenteich (Fortsetzung)**

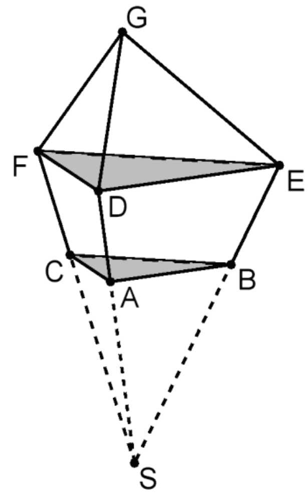
g) Wenn genau senkrecht zur Teichoberfläche Licht auf den Gartenteich fällt, entsteht durch die Brücke ein Schatten, der zum Teil auf der Wasseroberfläche liegt. Berechnen Sie die Größe der Wasseroberfläche, die in diesem Fall im Schatten liegt.

h) Die über den Teich führende Brücke soll in einem neuen $x$-$y$-Koordinatensystem modelliert werden durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur $y$-Achse verläuft.
Die Brücke hat eine Spannweite von 4 Metern und ist in der Mitte 0,5 Meter hoch (über der $x$-Achse). An den beiden Enden hat die Brücke einen Steigungswinkel von 45° (bzw. – 45°).
Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

i) Für einen Grillplatz hat der Gartenbesitzer eine Fläche in seinem Garten betoniert. Der Koordinatenursprung ist im Modell der Punkt der betonierten Fläche, der den geringsten Abstand zum Teichrand hat.
Ermitteln Sie diesen Abstand.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | h) | i) | Summe |
| BE | 6 | 5 | 2 | 6 | 8 | 9 | 3 | 6 | 5 | 50 |

## Aufgabe 3.1 CAS: Museum




Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper *ABCDEFG* dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide *DEFG*, die untere Etage dem Körper *ABCDEF*, der Teil der Pyramide *DEFS* ist. Das Dreieck *ABC* liegt in der *x*-*y*-Ebene. Das Dreieck *DEF* liegt parallel zu dieser Ebene.
In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5\,|\,5\,|\,0), B(-5\,|\,25\,|\,0), D(0\,|\,0\,|\,15)$, $E(0\,|\,30\,|\,15), F(-25\,|\,5\,|\,15)$ und $G(-10\,|\,10\,|\,35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von $S$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=s=3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}\text{, d.h. } S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

b) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

c) Berechnen Sie für das Dreieck *DEF* die Größe des Innenwinkels bei *E* sowie die Länge der Höhe auf der Seite $\overline{EF}$. [Zur Kontrolle: $h_{EF} \approx 21{,}21\,\text{m}$]

d) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m$^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

e) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade durch die Punkte *A* und *G* und die Ebene, in der das Dreieck *DEF* liegt, im Punkt $R\left(-\frac{50}{7}\,|\,\frac{50}{7}\,|\,15\right)$ schneiden.

f) An einer Metallstange, die durch die Strecke $\overline{RG}$ dargestellt wird, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt. Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck *EFG* dargestellt wird.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | f) | Summe |
| BE | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 6 | 25 |

## Aufgabe 3.2: Quadrat

Die Punkte $A(-2\,|\,2\,|\,-1)$, $B(1\,|\,2\,|\,2)$, $C(2\,|\,-2\,|\,1)$ und $D(-1\,|\,-2\,|\,-2)$ sind in dieser Reihenfolge Eckpunkte eines Quadrates, das in der Ebene $E$ liegt.

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene $E$ an.

b) Ein vom Punkt $R_a(-6\,|\,2a-4\,|\,6)$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ verlaufender geradliniger Laserstrahl trifft genau im Mittelpunkt $M$ des Quadrates $ABCD$ auf die Ebene $E$. Ermitteln Sie $a$.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den der Laserstrahl und die Diagonale $AC$ des Quadrates einschließen.

c) Beschreiben Sie die Lagebeziehung des Punktes $P$ zum Quadrat $ABCD$, dessen Ortsvektor durch die Gleichung $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ dargestellt wird.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | Summe |
| BE | 2 | 6 | 2 | 10 |

**Aufgabe 4.1: Medinet**

Eine Umfrage ergab, dass zu medizinischen Fragen 73 % der Bevölkerung das Internet nutzen. 55 % der Internetnutzer nutzen Medinet, einen beliebten Ratgeber bei medizinischen Fragen, der nur im Internet verfügbar ist.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem soweit wie möglich beschrifteten Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf zufällig ausgewählten Personen genau zehn befinden, die das Internet nutzen.

c) Wieder werden zwölf Personen zufällig ausgewählt. Betrachtet wird nun ein Ereignis *B*. Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$P(B) = 1 - \binom{12}{12} \cdot 0{,}73^{12} \cdot (1-0{,}73)^0 - \binom{12}{11} \cdot 0{,}73^{11} \cdot (1-0{,}73)^1$$

Beschreiben Sie das Ereignis $B$, dessen Wert mit dieser Gleichung berechnet werden kann.

d) In einer Arztpraxis sitzen 12 Personen, die das Internet zu medizinischen Fragen nutzen. Von diesen recherchieren 7 Personen bei Medinet. 3 Personen werden aufgerufen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den aufgerufenen höchstens 2 sind, die bei Medinet recherchieren.

| | Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | Summe |
| BE | 3 | 2 | 2 | 3 | 10 |

## Aufgabe 4.2 CAS: Brillenträger

In einer großen Gemeinde tragen 62,5 % der Bevölkerung eine Brille. Bei den Frauen beträgt der Anteil 64,8 %. Es ist bekannt, dass 52,1 % der Bevölkerung Frauen sind.

a) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.
Eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person ist ein Mann.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Brille trägt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
*A:* Von acht zufällig ausgewählten Personen sind alle Brillenträger.
*B*: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau drei keine Brillenträger.

c) Betrachtet werden die Ereignisse
*C*: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau neun Brillenträger.
*D*: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau zwölf Brillenträger.

Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *C*.
Begründen Sie mit Hilfe des Erwartungswertes für die Anzahl der Brillenträger, ob die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *D* größer oder kleiner ist als die für das Ereignis *C*.

d) Ein Optiker vermutet, dass mehr als 30 % der jungen Erwachsenen aus dem Landkreis Kunden in seinem Geschäft sind.
Sollte dies nicht der Fall sein überlegt er, in eine Werbeaktion mit Flyern zu investieren. Um jedoch unnötige Kosten zu vermeiden, soll die Nullhypothese „Es sind höchstens 30 % der jungen Erwachsenen Kunden bei diesem Optiker“ mit Hilfe einer Stichprobe von 100 jungen Erwachsenen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.
Bestimmen Sie die dazugehörige Entscheidungsregel.

e) Auf einer Brillenmesse befindet sich in einer Gruppe von 20 Brillenträgern genau eine Person, die eine Designerbrille trägt.
Berechnen Sie, wie viele Personen dieser Gruppe zufällig und nacheinander „ohne Zurücklegen“ mindestens auszuwählen sind, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Träger der Designerbrille unter den ausgewählten Personen befindet, mindestens 75 % beträgt. Begründen Sie Ihren Lösungsansatz.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
| BE | 5 | 4 | 5 | 5 | 6 | 25 |