Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2015

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
nicht für Aufgabenstellung 1:	Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt:	hilfsmittelfreier Teil
Hinweis:	Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil sollten spätestens nach 75 min abgegeben werden. Eine frühere Abgabe ist möglich. Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgabenstellung 1 bekommen Sie die weiteren Aufgabenstellungen und dürfen dann die zugelassenen Hilfsmittel verwenden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

Aufgabenstellung 2

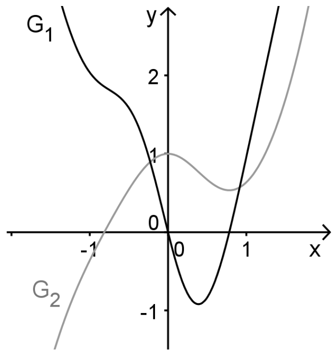
Thema/Inhalt:	Analysis
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie/lineare Algebra und Stochastik
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Teil 1 - Analysis



a) Im Bild sind die Graphen G_1 und G_2 dargestellt.
Einer der beiden ist der Graph einer Funktion f, der andere der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion f'.
Geben Sie an, welcher der beiden Graphen die Ableitungsfunktion zeigt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = -2e^{2x} + 1$, deren Graph die y-Achse im Punkt $S_y(0 \mid 5)$ schneidet.

c) Aus einem 20 Meter langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Die Seitenlänge der Quadrate ist a. Stellen Sie eine Funktion in Abhängigkeit von a auf, mit der man das Volumen des Quaders ermitteln kann. Geben Sie den Definitionsbereich für diese Funktion an.

Teil 2 - Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Gegeben sind die Punkte $P(1 \mid -2 \mid 1)$, $Q(2 \mid -3 \mid -1)$ und $R(-1 \mid 4 \mid 2)$.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt R und parallel zur Geraden durch die Punkte P und Q verläuft.

b) Ermitteln Sie zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$,so dass gilt:
Je zwei der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal zueinander.

c) E_m ist die mittelparallele Ebene, die alle Punkte enthält, die zu den beiden Ebenen $E_1: \ 2x + 3y - 4z = d_1$ und $E_2: 2x + 3y - 4z = d_2$ den gleichen Abstand haben.
Weisen Sie nach, dass E_m die Gleichung $2x + 3y - 4z = \frac{d_1 + d_2}{2}$ mit $d_1, d_2 \neq 0$ hat.

Teil 3 nächste Seite

Teil 3 - Stochastik

a) Bei einem Multiple-Choice-Test sollen 4 Fragen durch Ankreuzen beantwortet werden. Es gibt stets 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand durch willkürliches Raten alle Antworten richtig angekreuzt hat.

b) Vervollständigen Sie die gegebene Vierfeldertafel und geben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten an: $P(\overline{A} \cap B)$ und $P_A(B)$.

	A	$\overline{A}$	
B	0,25		0,8
$\overline{B}$		0,15	

c) Ein fairer Würfel wird insgesamt 20-mal geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe, bei denen eine gerade Zahl erscheint. Es gelte $P(X = 3) = w$.
Geben Sie an, für welchen Wert dieser Zufallsgröße die Wahrscheinlichkeit ebenfalls w beträgt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben										
	Analysis			Geometrie			Stochastik			
Teilaufgabe	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	Summe
BE	2	3	5	2	4	4	3	4	3	30

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2015

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Aufgabenvorschlag Teil 2

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie/lineare Algebra und Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

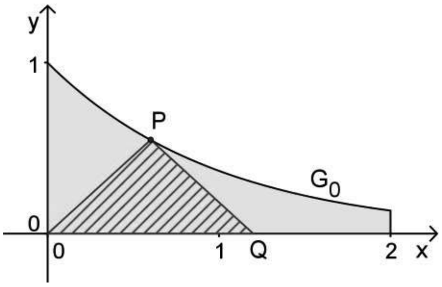
Aufgabe 2.1: Skateboardanlage

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x)=(ax+1)\cdot e^{-x+a}$; $x\in I\!R, a\in I\!R, a\geq 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a .

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ in Abhängigkeit von *a* an.

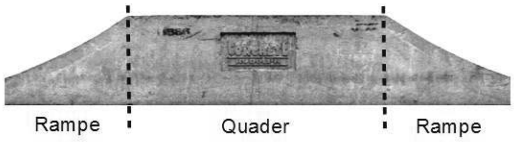
b) Für f_a gilt: Wenn ein Graph der Funktionenschar f_a für $a>0$ in einem Punkt H_a eine zur *x*-Achse parallele Tangente besitzt, dann ist dieser Punkt ein lokaler Hochpunkt von G_a . (Das dürfen Sie ohne Nachweis verwenden.)
Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung die Koordinaten von H_a .
[Kontrollergebnis: $f_a'(x)=e^{-x+a}(-ax+a-1)$]

c) Der Graph G_0 schließt mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x=2$ eine Fläche ein, die dem Querschnitt einer Skateboardrampe entspricht. Der Betreiber der Skateboardanlage möchte auf dieser Querschnittsfläche ein dreieckiges Firmenlogo anbringen. Die Basis des Dreiecks OQP soll auf der *x*-Achse liegen, das Dreieck soll gleichschenklig sein, und der Punkt $P(x_P\mid f_0(x_P))$, der auf G_0 liegt, soll so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist.



Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks mit der Gleichung $A(x_P)=x_P\cdot e^{-x_P}$ berechnet werden kann und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P .

d) Der Betreiber will zwei der in c) beschriebenen Rampen an ihren höchsten Stellen mit einem Quader verbinden ($1\,\text{LE}=1\,\text{m}$).
Der Quader hat eine Länge von 4 m und ist 1 m hoch. Die Tiefe des zusammengesetzten Körpers beträgt $1{,}25\text{ m}$. Berechnen Sie das Volumen des Gesamtkörpers.

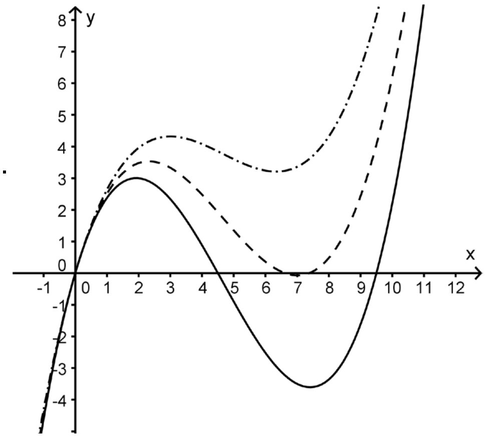


e) Eine weitere Rampe soll durch einen anderen Graphen G_a mit $0<a<1$ modelliert werden. Nun soll der Winkel an der Verbindungsstelle zu einem in der Höhe angepassten Quader 150° betragen. Ermitteln Sie durch systematisches Probieren ein Intervall der Länge $\frac{1}{10}$, in dem der Parameter des Graphen liegt, der hierfür geeignet ist.

f) Anstelle von G_0 soll eine neue obere Begrenzung des Rampenquerschnitts im Intervall $[0;2]$ mithilfe einer quadratischen Parabel p modelliert werden. Diese soll in ihrem höchsten Punkt $R(0\mid p(0))$ und ihrem niedrigsten Punkt $Q(2\mid p(2))$ mit G_0 übereinstimmen und im Punkt $Q(2\mid p(2))$ das gleiche Gefälle wie die ursprünglich mit G_0 modellierte Rampe aufweisen. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung für die Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	8	7	9	6	5	5	40

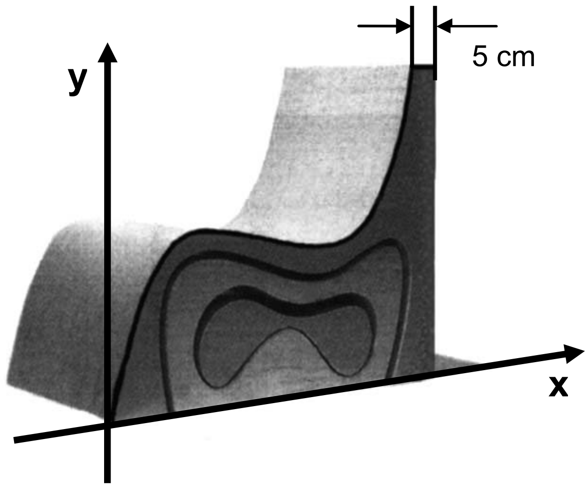
Aufgabe 2.2: Designersessel



Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit
$f_a(x) = ax^3 - 14ax^2 + 3{,}42x$; $a \in IR, a > 0$.
Drei Graphen der Schar sind in der Abbildung dargestellt.

a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar bei $x_n = 0$ dieselbe Steigung haben.
Einer der Graphen der Schar hat außer $x_n = 0$ genau eine weitere Nullstelle.
Berechnen Sie den Parameterwert dieser Funktion gerundet auf zwei Nachkommastellen.

b) Jeder Graph der Schar hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie seine Koordinaten und weisen Sie damit nach, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur *y*-Achse liegen. Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.
Einer der Graphen der Schar hat an der Stelle $x_e = 3$ einen Hochpunkt.
Bestimmen Sie für die zu diesem Graphen gehörende Funktion f_a die Funktionsgleichung.



Der abgebildete Designersessel hat Seitenflächen, die für $0 \le x \le 9$ aus der Fläche unter dem Graphen von $f_{0,06}$ der gegebenen Funktionenschar (oberster Graph in der oberen Abbildung) und für $9 < x \le 9{,}5$ aus einem angesetzten Rechteck von 5 cm Breite bestehen (1 LE = 10 cm).

c) Bestimmen Sie die Gesamthöhe des Sessels und ermitteln Sie, wie hoch der Sessel an der niedrigsten Stelle der Sitzfläche ist (Angaben in cm).

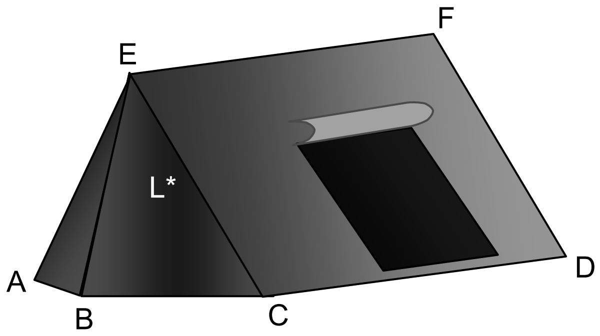
d) Berechnen Sie die Größe der in der Abbildung sichtbaren Seitenfläche (Angabe in m^2).
Diese Seitenfläche enthält auch die 5 cm breite Rechteckfläche am hinteren Rand.
Die Seitenfläche soll grafisch neu gestaltet werden.
Für die Grafik wird ein achsenparalleles Rechteck der Größe 85 cm x 30 cm benötigt.
Untersuchen Sie, ob ein solches Rechteck auf die Seitenfläche passt.

e) Für jede Stelle x_1 im Fußbereich ($x_1 < 3$) gibt es eine Stelle x_2 im Lehnenbereich ($x_2 > 6{,}3$) mit gleicher Steigung.
Weisen Sie für $f_{0,06}$ nach, dass für je zwei *x*-Werte x_1 und x_2, bei denen die Steigung gleich ist, gilt: $x_1 + x_2 = \frac{28}{3}$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	11	7	8	5	40

Aufgabe 3.1: Campingzelt

Im Bild ist ein Campingzelt mit fünfeckiger Grundfläche dargestellt, von dem die Punkte $A(3\,|\,4\,|\,0)$, $B(4\,|\,3{,}5\,|\,0)$, $C(5\,|\,4\,|\,0)$, $D(5\,|\,6{,}5\,|\,0)$ und $E(4\,|\,4\,|\,1{,}5)$ gegeben sind (Skizze nicht maßstabsgerecht, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$).
Die Punkte *E* und *F* sind Anfangs- und Endpunkt der zum Erdboden parallel verlaufenden oberen Zeltkante.
Das Zelt hat eine Höhe von 1,50 Metern und ist symmetrisch zur Ebene durch die Punkte *E*, *B* und *F*.



a) Die fünfeckige Grundfläche dieses Zeltes wird von dem gleichschenkligen Dreieck *ABC* und dem Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$ gebildet.
Ermitteln Sie die Größe der Grundfläche.

b) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene H, in der die Zeltfläche *BCE* dieses Zeltes liegt.
[Kontrollergebnis für $H:\ -3x + 6y - 2z = 9$]

c) Im Punkt $L(7{,}25\,|\,-0{,}625\,|\,9{,}75)$ ist ein punktförmig gedachter Lautsprecher installiert, der auf der Zeltfläche *BCE* den Schattenpunkt *L** erzeugt.
Die einfallenden Sonnenstrahlen werden vereinfacht als parallel angenommen und verlaufen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *L** sowie die Größe des Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Zeltfläche *BCE* treffen.

d) Die obere Kante der „Eingangsöffnung des Zeltes“ liegt in der Ebene *CDFE* und verläuft im Abstand von 50 Zentimetern parallel zur Zeltkante $\overline{EF}$.
Prüfen Sie, ob ein Kind mit $1{,}15\,\text{m}$ Körpergröße aufrecht, also ohne sich bücken zu müssen, durch diesen Eingang gehen kann.

e) Im Inneren des Zeltes haben die Camper eine kleine Lampe aufgehängt. Diese befindet sich genau $25\,\text{cm}$ unter dem Mittelpunkt der Zeltkante $\overline{EF}$ mit $F(4\,|\,6{,}5\,|\,1{,}5)$.
Prüfen Sie, ob der Sicherheitsabstand von $0{,}2\,\text{m}$ zur Zeltfläche *CDFE* eingehalten wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	5	7	4	7	30

Aufgabe 3.2: „Vorsorgemuffel“

Zu „Vorsorgemuffeln“ zählen Bundesbürger, die nicht regelmäßig eine Zahnarztpraxis zu Kontrolluntersuchungen aufsuchen. Nach einer Umfrage des Instituts der Deutschen Zahnärzte (2013) zählen dazu 29,3 % der weiblichen und sogar 44,7 % der männlichen Bundesbürger.
Unabhängig davon, ob er ein „Vorsorgemuffel“ ist oder nicht, geht im Mittel jeder sechste Bundesbürger bei akuten Beschwerden sofort zu einem Zahnarzt.

Wenn nicht ausdrücklich von männlichen oder weiblichen Bundesbürgern die Rede ist, sind immer alle Bundesbürger unabhängig vom Geschlecht gemeint.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich acht oder neun „Vorsorgemuffel“.

B: Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 15 und weniger als 29 Personen zu denjenigen, die einen Zahnarzt bei akuten Beschwerden sofort aufsuchen.

C: Unter 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befinden sich mindestens 85 Personen, die bei akuten Beschwerden nicht sofort zum Zahnarzt gehen.

b) Berechnen Sie, wie viele weibliche Bundesbürger höchstens ausgewählt werden dürften, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, wenigstens einen „Vorsorgemuffel“ zu entdecken, unter 99 % liegt.

c) Nacheinander wurden zufällig ausgewählte männliche Bundesbürger befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens der fünfte Befragte ein „Vorsorgemuffel“ war.

d) Der Anteil der Männer unter allen Bundesbürgern liegt bei 48,88 % (Zensus 2011).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unter allen Bundesbürgern zufällig ausgewählter Bundesbürger kein „Vorsorgemuffel“ ist, also regelmäßig zur zahnärztlichen Kontrolluntersuchung geht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass eine aus der Gruppe der „Vorsorgemuffel“ zufällig ausgewählte Person eine Frau ist.

e) In einem Landesteil Deutschlands beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Einwohner „Vorsorgemuffel“ ist, p mit $0 < p < 1$.

Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter vier zufällig ausgewählten Einwohnern dieses Landesteiles genau drei „Vorsorgemuffel“ befinden, maximal ist. Auf den Nachweis des lokalen Maximums wird verzichtet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	3	8	4	30

Anlage

Anlage zur Aufgabe 3.2: „Vorsorgemuffel“

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 − (abgelesener Wert)

n	k \ p	0,02	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	k
	0	1326	0059							**99**
	1	4033	0371	0003						**98**
	2	6767	1183	0019						**97**
	3	8590	2578	0078						**96**
	4	9492	4360	0237	0001					**95**
	5	9845	6160	0576	0004					**94**
	6	9959	7660	1172	0013	0001				**93**
	7	9991	8720	2061	0038	0003				**92**
	8	9998	9369	3209	0095	0009				**91**
	9	9999	9718	4513	0231	0023				**90**
	10		9885	5832	0427	0057	0001			**89**
	11		9957	7030	0777	0126	0004			**88**
	12		9985	8018	1297	0253	0010			**87**
	13		9995	8761	2000	0469	0025	0001		**86**
	14		9999	9274	2874	0804	0054	0002		**85**
	15			9601	3877	1285	0111	0004		**84**
	16			9794	4942	1923	0211	0010	0001	**83**
	17			9900	5994	2712	0376	0022	0002	**82**
	18			9954	6965	3621	0630	0045	0005	**81**
	19			9980	7803	4602	0995	0089	0011	**80**
	20			9992	8481	5595	1488	0165	0024	**79**
	21			9997	8998	6540	2114	0288	0048	**78**
	22			9999	9370	7389	2864	0479	0091	**77**
	23				9621	8109	3711	0755	0164	**76**
	24				9783	8686	4617	1136	0281	**75**
	25				9881	9125	5535	1631	0458	**74**
	26				9938	9442	6417	2244	0715	**73**
	27				9969	9658	7224	2964	1066	**72**
	28				9985	9800	7925	3768	1524	**71**
	29				9993	9888	8505	4623	2093	**70**
	30				9997	9939	8962	5491	2766	**69**
	31				9999	9969	9307	6331	3525	**68**
	32					9985	9554	7107	4344	**67**
	33					9993	9723	7793	5188	**66**
	34					9997	9836	8371	6019	**65**
	35					9999	9906	8839	6803	**64**
100	**36**					9999	9948	9201	7511	**63**
	37						9973	9470	8123	**62**
	38						9986	9660	8630	**61**
	39						9993	9790	9034	**60**
	40						9997	9875	9341	**59**
	41						9999	9928	9566	**58**
	42						9999	9960	9724	**57**
	43							9979	9831	**56**
	44							9989	9900	**55**
	45							9995	9943	**54**
	46							9997	9969	**53**
	47							9999	9983	**52**
	48							9999	9991	**51**
	49								9996	**50**
	50								9998	**49**
	51								9999	**48**
	52									**47**
n	**k**		**0,95**	**0,90**	$\frac{5}{6}$	**0,80**	**0,75**	**0,70**	$\frac{2}{3}$	k / p