Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2014

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Hosentasche

Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = (ax+1) \cdot e^{-ax}$; $x \in IR$; $a \in IR$.
Die Graphen dieser Funktionsschar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von *a*. Bestimmen Sie den Wert des Parameters *a*, für den die Scharfunktion keine Nullstelle hat, und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an.

b) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von *a* ($a \neq 0$) an.

c) Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a ($a \neq 0$) den lokalen Extrempunkt $E(0\,|\,1)$ haben.
Alle Wendepunkte der Graphen G_a ($a \neq 0$) liegen auf einem parallel zur *x*-Achse verlaufenden Graphen einer Funktion *g*. Geben Sie die Funktionsgleichung von *g* an.

d) In der Anlage sind zwei Graphen der Funktionsschar f_a dargestellt.
Begründen Sie, dass es sich dabei um die Graphen G_2 und G_{-2} handelt und beschriften Sie die Graphen in der Anlage.
Eine Bekleidungsfirma möchte Gesäßtaschen von Jeans wie rechts abgebildet besticken. Zur Modellierung des Motivs werden die Graphen G_2 und G_{-2} genutzt (vgl. Anlage). Der untere Rand des Motivs soll ebenfalls durch 2 Graphen dargestellt werden, so dass die *x*- bzw. *y*-Achse Symmetrieachsen des Motivs sind. Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung an und zeichnen Sie die Graphen möglichst vollständig in der Anlage.

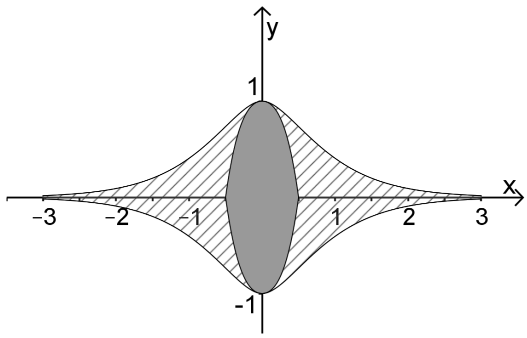


Abbildung zu e) und f)

Der in der Abbildung schraffiert dargestellte Teil des Motivs soll bestickt werden. Berechnen Sie die Größe dieser Fläche im Intervall [–3; 3].

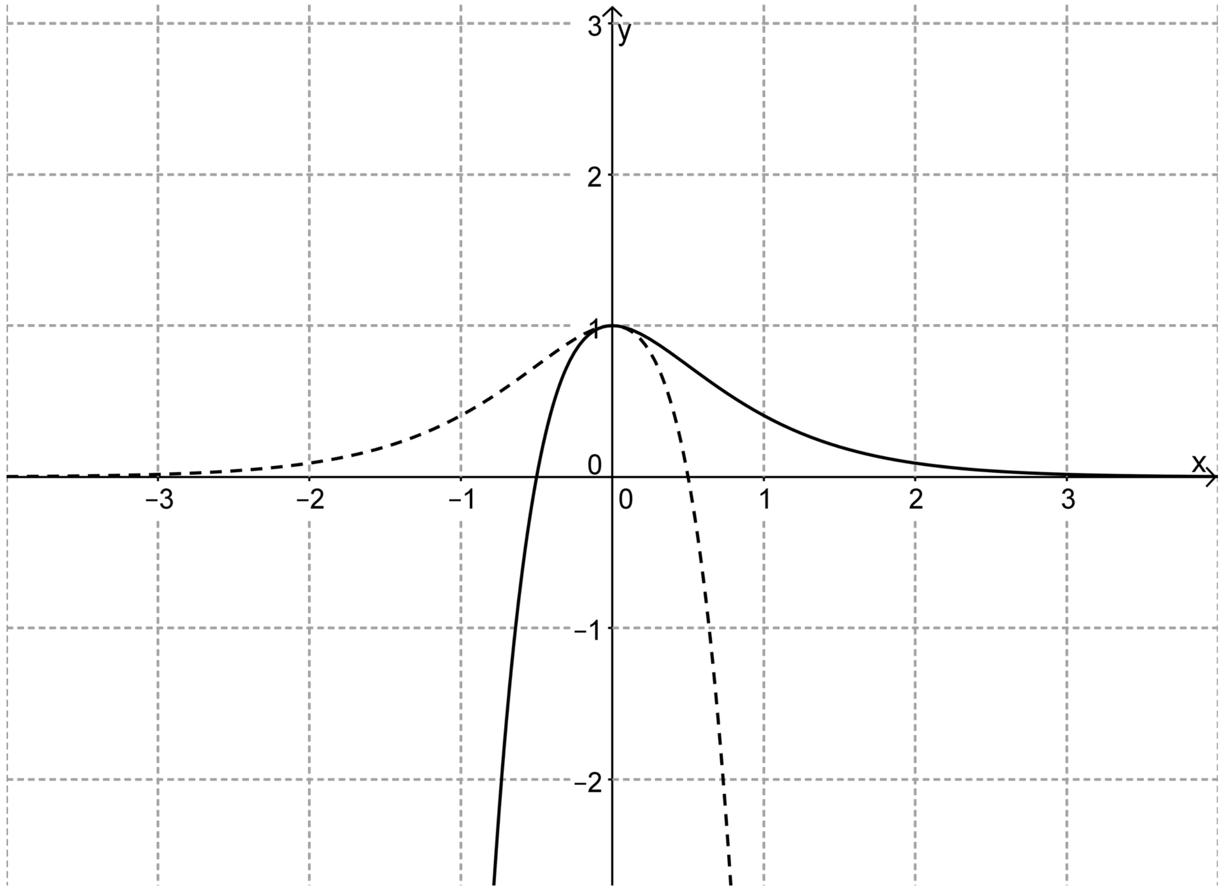
e) Betrachtet man die Graphen G_a zur Entwicklung des Motivs, ist das Verhältnis zwischen der in der Abbildung schraffierten und der grau gefärbten Teilfläche jeweils unterschiedlich. Ermitteln Sie, für welche positiven Werte des Parameters *a* die grau gefärbte Teilfläche größer ist als die schraffierte (Näherungslösung).

f) Der Teil der in der Abbildung grau gefärbten Fläche, der oberhalb der *x*-Achse liegt, soll nun durch den Graphen einer quadratischen Funktion *p* so dargestellt werden, dass die Größe dieser Teilfläche unverändert (e – 2) FE beträgt. Der lokale Extrempunkt bleibt der Punkt $E(0\,|\,1)$.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von *p*.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	4	9	12	7	5	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Hosentasche



Aufgabe 1.2 CAS: Optikerlogo

Gegeben sind die Funktionen f_a mit der Gleichung $f_a(x) = \sqrt{ax} - \frac{1}{2}x^2$; $a \in IR$, $a > 0$.
Die Graphen dieser Funktionen sind G_a .

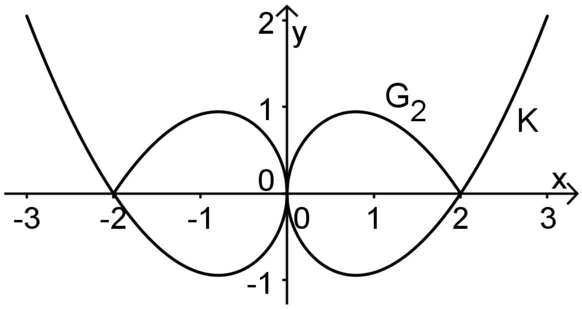
a) Geben Sie den Definitionsbereich sowie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ an. Berechnen Sie die Nullstellen von f_a .

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes der Graphen G_a .
Die Extrempunkte aller Graphen G_a liegen auf dem Graphen einer Funktion g .
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g .
Weisen Sie nach, dass die Graphen G_a keine Wendepunkte besitzen.

c) Es existiert genau ein Graph G_a , dessen Tangente im Punkt $(1 | f_a(1))$ mit den beiden Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.
Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert *a*.

d) Die Gerade h mit der Gleichung $y = -3x + 12$ begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche. Der Graph G_{16} teilt diese Fläche. Bestimmen Sie das Teilungsverhältnis.

e) Ein Optiker hat eine Werbefirma damit beauftragt, ein Logo für sein Geschäft anzufertigen. Die Werbefirma hat ein brillenähnliches Logo entworfen, für das sie unter anderem im Intervall $[0;2]$ den Graphen G_2 und im Intervall $[0;3]$ den durch Spiegelung von G_2 an der *x*-Achse entstehenden Graphen K verwendet hat (siehe Abbildung).



Geben Sie eine Gleichung für die zu *K* gehörende Funktion *k* an.
Berechnen Sie die von G_2 und K im I. und IV. Quadranten eingeschlossene Fläche, die einem Brillenglas entspricht und geben Sie diese in Quadratmetern an ($1\,\text{LE} = 0{,}5\,\text{m}$).

f) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Funktionen, deren Graphen im Intervall $[-3;0]$ bzw. $[-2;0]$ das Logo zu einer symmetrischen „Brille“ vervollständigen.
Begründen Sie am Beispiel von G_2 und *K*, dass die modellhaften „Brillengläser“ im Koordinatenursprung keinen „Knick“ haben, das heißt, dass die Graphen im Übergangspunkt eine gemeinsame Tangente besitzen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	13	4	6	5	5	40

Aufgabe 2.1 CAS: Installation

Ein Künstler bereitet für eine Ausstellung im Freien eine Installation vor. Dafür hat er fünf verschieden große, dreieckige Segeltücher hergestellt.
In den Punkten $A(5\,|\,3\,|\,1)$ und $B(-3\,|\,7\,|\,9)$ des Geländes sollen jeweils zwei Ecken aller fünf Segeltücher befestigt werden. Die jeweils dritte Ecke der fünf Segeltücher soll in verschiedenen Punkten der Schar $C_k(2+k\,|\,-3+4k\,|\,10-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ so angebracht werden, dass die Tücher straff gespannt sind und fünf ebene Dreiecke bilden.
Um die dritte Ecke der Tücher jeweils im Punkt C_k zu befestigen, wird ein Seil gespannt. Dieses Seil wird durch die Gerade g beschrieben (s. Abb.).
Es gilt: $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.

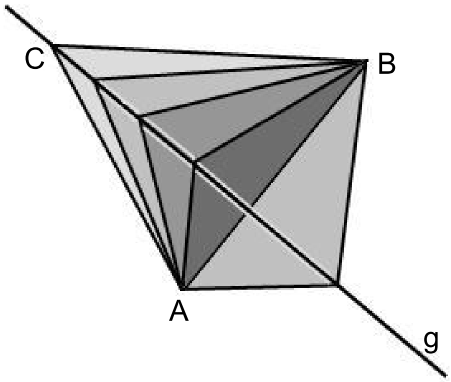


Abb.: Ansicht der Installation von oben (nicht maßstabsgetreu)

a) Geben Sie eine Gleichung für g, auf der alle Punkte C_k liegen, an.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B und die Gerade g windschief sind.

b) Ein Segeltuch wird in A, B und im Punkt C_0 befestigt.
Zeigen Sie, dass dieses Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Bestimmen Sie die Größe der Basiswinkel.
Berechnen Sie die Fläche des Segeltuchs in m^2.

c) In der Ebene, zu der A und B symmetrisch liegen, sollen Stahlschnüre zwischen den Segeltüchern gespannt werden. An den Stahlschnüren sind farbige Strahler befestigt, um die Segeltücher abends anzuleuchten.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Stahlschnüre liegen, in Koordinatenform an.
Zeigen Sie, dass alle Stahlschnüre am Seil aus Aufgabe a) befestigt werden können.

d) Begründen Sie, dass alle fünf Segeltücher die Form eines gleichschenkligen Dreiecks haben.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C_k, an dem das Segeltuch mit der kleinstmöglichen Fläche befestigt werden müsste.

f) Für zwei Werte von k schließen die Segeltücher ABC_k mit dem Seil einen Winkel von 45° ein. Bestimmen Sie die beiden Parameterwerte von k.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	8	5	3	4	5	30

Aufgabe 2.2 CAS: Skigebiet

Im Bild ist ein Ausschnitt aus einem Skigebiet zu sehen. Vereinfacht werden die Pisten und Wege in den betrachteten Abschnitten als geradlinig verlaufend sowie Objekte als Punkte angenommen. Es gilt $1\ \text{LE} = 100\ \text{m}$.

Zwei Skipisten werden durch Teile der Geraden g und h modelliert. Zwischen der Bezeichnung von Gerade und entsprechender Piste wird nicht unterschieden.

Die Gerade g hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in IR$.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $P_1(-2\,|\,8\,|\,13{,}5)$ und $P_2(-4\,|\,12\,|\,15{,}5)$.

Im Punkt $K(0\,|\,7\,|\,15{,}75)$ ist eine Kamera installiert, die Bilder vom Skigebiet sendet.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Gerade h an. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q, in dem beide Geraden aufeinandertreffen.

b) Ein Skifahrer startet im Punkt P_2 und fährt die Piste h hinunter. Nach 20 Sekunden passiert er den Punkt $P_3(-3{,}5\,|\,11\,|\,15)$. Zeigen Sie, dass P_3 auf der Piste h liegt.
Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit der er in den letzten 20 Sekunden unterwegs war.
Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Piste h gegenüber einer horizontalen Ebene.

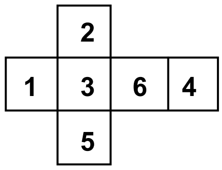
c) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Pisten g und h liegen.
[Zur Kontrolle: $E:\ -y + 2z = 19$]
Weisen Sie nach, dass die geradlinige Bahn $b:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 12 \\ 15{,}75 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $m \in IR$
eines Skilifts parallel zu E verläuft. Berechnen Sie den Abstand des Skilifts zur Ebene E.

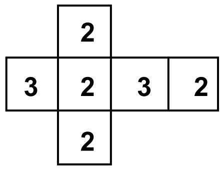
d) Die Kamera im Punkt K hat bei einem Schwenk über das Skigebiet zu zwei verschiedenen Zeitpunkten die Punkte P_1 und P_2 erfasst. Berechnen Sie den Winkel P_1KP_2.
Ermitteln Sie, wie viel Meter höher die Kamera theoretisch bei gleicher x- und y-Koordinate installiert werden müsste, wenn die Punkte P_1 und P_2 bereits nach Überstreichen eines Winkels von 45° erfasst werden sollen.

e) Zur Beschneiung der Pisten g und h soll in einem Punkt S eine Schneekanone aufgestellt werden. S soll neben den Pisten in der Ebene E aus Teilaufgabe c) liegen und zu beiden Pisten den gleichen Abstand haben.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Ermittlung der Koordinaten eines möglichen Punktes S.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	8	7	7	4	30

Aufgabe 3.1 CAS: Abstandsspiel


W1


W2

Nebenstehend sind die Netze zweier Würfel W1 und W2 abgebildet. W1 ist ein üblicher Laplace-Würfel, W2 ist durch Neubeschriftung aus einem solchen entstanden. Das Abstandsspiel hat folgende Regeln:

- Einer der beiden Würfel wird zweimal geworfen.
- Es wird die Differenz der beiden Würfelergebnisse so gebildet, dass sie nicht negativ ist.
- Diese Zahl – also der Abstand der Würfelergebnisse – ist das Ergebnis des Spiels.

Beispiele: „2“ und „6“ gewürfelt, Ergebnis: 6 – 2 = 4 (der Abstand von 2 und 6);
„2“ und „2“ gewürfelt, Ergebnis: 2 – 2 = 0 (der Abstand von 2 und 2).

a) Bestimmen Sie für beide Würfel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Das Ergebnis beträgt 0.

B: Das Ergebnis ist ungerade. (Hinweis: Die Zahl null ist gerade.)

[Zur Kontrolle: Für den Würfel W1 gilt $P(A)=\frac{1}{6}$, für W2 gilt $P(A)=\frac{5}{9}$.]

b) René spielt mit dem Würfel W2. Er würfelt einen Pasch (d. h. beide Würfe zeigen die gleiche Augenzahl), erzielt also das Ergebnis 0.
Marie spielt mit W1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bei diesem Abstandsspiel ein größeres Ergebnis als René erzielt.

c) Mit dem Würfel W1 wird zehnmal das Abstandsspiel gespielt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

C: Das Ergebnis 0 ergibt sich genau fünfmal.

D: Das Ergebnis 0 ergibt sich mindestens zweimal, aber weniger als sechsmal.

E_k steht für folgendes Ereignis: Das Ergebnis 0 (also Abstand 0) erscheint *k*-mal.
Ermitteln Sie, für wie viele Werte von $k \in \{0;1;2;3;...;9;10\}$ gilt: $P(E_k) \geq 0{,}05$.

d) Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spiele, die mit W1 durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % das Ergebnis 0 mindestens einmal erzielt wird.

e) René ergreift zufällig einen der beiden Würfel und spielt einmal das Abstandsspiel.
Das Ergebnis ist 0.
Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den Würfel W1 gegriffen hat.

f) Auf einer bestimmten Anzahl der Seiten des Würfels W1, auf denen nicht „6“ steht, wird die Aufschrift mit „0“ überschrieben. Mit diesem neuen Würfel W1 wird fünfmal das Abstandsspiel gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann für die Differenz der gewürfelten Augenzahlen nicht ein einziges Mal das Ergebnis 6 erreicht wird, beträgt ungefähr 40 %.

Bestimmen Sie die Anzahl der überschriebenen Seiten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	10	2	7	3	4	4	30

Aufgabe 3.2 CAS: Förderverein

Der Förderverein einer Schule besteht zu 80 % aus Eltern, zu 15 % aus Lehrkräften und zu 5 % aus Vertretern von Betrieben der Stadt.

a) Die langjährige Erfahrung zeigt, dass 15 % der Eltern, 10 % der Lehrkräfte und 90 % der Betriebe dem Förderverein einmal im Jahr eine Spende zukommen lassen.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   A: Ein zufällig ausgewähltes Mitglied des Fördervereins hat eine Spende geleistet.
   B: Ein zufällig ausgewähltes Mitglied ist Lehrkraft und hat keine Spende geleistet.
   Von einem zufällig ausgewählten Mitglied ist bekannt, dass es zu den Spendern gehört. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ein Elternteil ist.

b) Eine weitere Einnahmequelle des Fördervereins ist das an zwei Abenden stattfindende Sommerkonzert. An der Pausenversorgung sind insgesamt 20 Personen beteiligt, davon 15 Schüler/innen und 5 Eltern. Die Helfer teilen sich auf die beiden Abende zu je einer Gruppe von 10 Personen auf. Diese Aufteilung erfolgt zufällig.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am ersten Abend 8 Schüler und 2 Eltern zusammen arbeiten.

Während der Pause werden Getränke und Speisen angeboten. Die Preise werden mithilfe eines Spiels festgelegt. Dazu wird ein Tetraeder, dessen Aufschriften sich aus dem abgebildeten Netz ergeben, zweimal geworfen. Die Zahl auf der Tetraederseite, die unten liegt und die man nicht sieht, gilt als die geworfene. Der Preis ergibt sich aus dem Produkt der beiden geworfenen Augenzahlen in Euro.

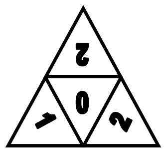


Abb.: Netz des Tetraeders

c) Die Zufallsgröße X gibt die Höhe der mit dem Tetraeder festgelegten Preise an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X ist z. T. in der Tabelle vorgegeben:

x_i in Euro	0	1	
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	

   Weisen Sie die Richtigkeit der vorgegebenen Werte in der Tabelle nach und vervollständigen Sie die Tabelle.
   Untersuchen Sie, ob die zu erwartenden Einnahmen pro Spiel im Mittel höher als zwei Euro sind.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
   D: Unter zehn zufällig ausgewählten Mitspielern befindet sich genau einer, der nichts bezahlen muss.
   E: Unter zehn zufällig ausgewählten Mitspielern befinden sich mindestens acht, die nichts bezahlen müssen.
   F: Unter zehn zufällig ausgewählten Mitspielern befinden sich mehr als einer und höchstens sieben, die genau einen Euro bezahlen müssen.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
   G: Unter 10 zufällig ausgewählten Mitspielern befinden sich genau drei, die nichts bezahlen müssen, und genau zwei, die genau einen Euro bezahlen müssen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	8	6	4	30