Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2018

Mathematik

Grundkurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

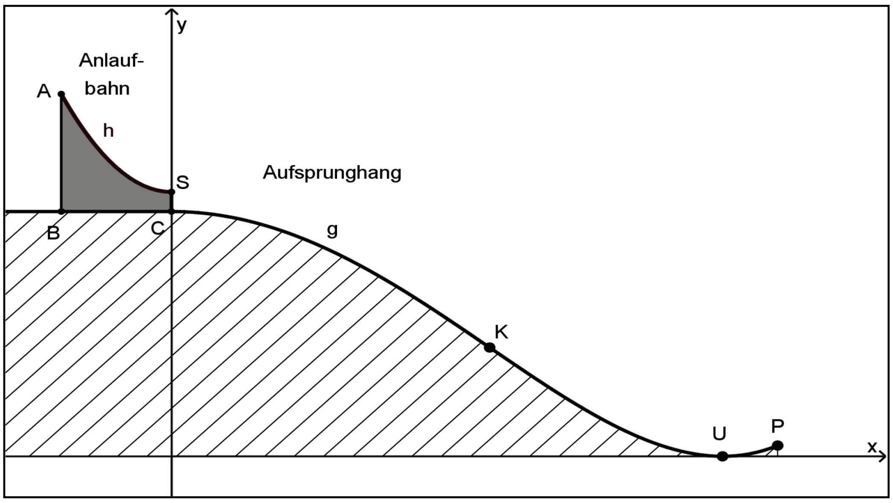
Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Skisprunganlage

Die Abbildung zeigt das Profil einer Skisprunganlage.



Die Anlaufbahn ist die Oberseite des Bauwerks *ABCS*. Sie wird von *A* bis *S* durch den Graphen der Funktion *h* beschrieben. Die Punkte *S* und *C* liegen auf der *y*-Achse. Die Strecke von *B* nach *C* liegt waagerecht und ist 20 m lang.

Der Aufsprunghang beginnt am Punkt *C* und wird durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben. Die Funktionen *g* und *h* sind gegeben durch

$$g(x)=\frac{1}{1000}\cdot\left(\frac{1}{2000}x^4-10x^2+50\,000\right) \quad \text{und} \quad h(x)=0{,}05x^2+54\,.$$

Maßstab: $1\,\text{LE}=1\text{ m}$

a) Berechnen Sie, wie viel höher der Punkt S als der Punkt C liegt.
Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

b) Ermitteln Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Bauwerks *ABCS.*

c) Der Punkt U liegt an der tiefsten Stelle des Aufsprunghangs *g*.
Ermitteln Sie rechnerisch Lage und Art aller lokalen Extrempunkte des Graphen von g und entscheiden Sie, welcher der Extrempunkte dem Punkt *U* entspricht.
Berechnen Sie die mittlere Steigung des Aufsprunghangs zwischen *C* und *U*.

d) Von besonderer Bedeutung für die Konstruktion einer Skisprunganlage ist der Punkt *K*, in dem der Aufsprunghang sein stärkstes Gefälle aufweist.
Berechnen Sie die Koordinaten von *K*. Für die Ermittlung der *x*-Koordinate von *K* genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung.

e) Im Punkt *P*(110 | *g*(110)) soll der Aufsprunghang ohne Knick geradlinig fortgesetzt werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Gerade, die diese Fortsetzung beschreibt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.1 CAS: Skisprunganlage (Fortsetzung)

Die Flugbahn eines Skispringers wird durch eine quadratische Funktion f beschrieben. Im Punkt S geht die Anlaufbahn h ohne Knick in diese Flugbahn über. Bei $x = 60$ m hat der Springer eine vertikale Höhe von 4,72 m über dem Aufsprunghang

f) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Flugbahn.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem der Springer auf dem Aufsprunghang landet.

Berechnen Sie den Winkel zwischen der Flugbahn des Springers und dem Aufsprunghang im Punkt L.

[Zur Kontrolle: $f(x) = -0{,}008\,x^2 + 54$ und $L(73{,}9\,|\,10{,}3)$]

g) Aus Sicherheitsgründen darf der vertikale Abstand des Springers zum Aufsprunghang während des Sprunges nicht zu groß werden.

Geben Sie das Intervall an, in dem der vertikale Abstand des Springers zum Aufsprunghang mindestens 5 m beträgt.

Weisen Sie nach, dass der maximale vertikale Abstand zum Hang während des Fluges höchstens 6 m beträgt.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	3	4	7	3	4	11	8	40

Aufgabe 1.2 CAS: Höhenprofil

Gegeben sind die Funktionen f und g durch ihre Gleichungen
$f(x)=(x+1)\cdot e^{-0{,}5\cdot x}$ sowie $g(x)=x+1$.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x\to-\infty$ sowie $x\to\infty$.

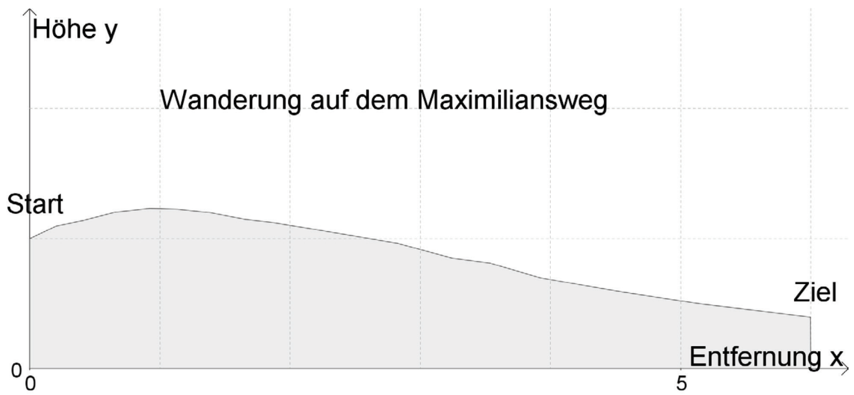
b) Die Graphen der Funktionen f und g haben einen Schnittpunkt S, der auf der y-Achse liegt und einen weiteren Schnittpunkt T. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S und T.

Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Tangente an den Graphen der Funktion f und die Gerade g im Punkt S schneiden.

c) Die Graphen der Funktionen f und g schließen im 2. Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt A vollständig ein.

Untersuchen Sie, ob der Inhalt der Fläche A größer als $\frac{1}{10}$ ist.

Die Abbildung zeigt das Höhenprofil für einen Wanderweg im Mittelgebirge. Vereinfacht soll das Höhenprofil durch die Funktion f mit $f(x)=(x+1)\cdot e^{-0{,}5\cdot x}, 0\le x\le 6$, beschrieben werden. (1 LE = 1 km)



d) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes des Höhenprofils.

e) Berechnen Sie den kleinsten Wert, den die Steigung des Höhenprofils annehmen kann. Ermitteln Sie ein möglichst großes Intervall $[x_1;x_2]$ mit auf vier Nachkommastellen gerundeten Intervallgrenzen x_1 und x_2, in dem für die Steigung $f'(x)$ des Höhenprofils gilt: $f'(x)\le -0{,}2$.

f) Im Intervall $[2;6]$ kann das Höhenprofil näherungsweise durch eine Gerade s ersetzt werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2|f(2))$ und $(6|f(6))$.

[Zur Kontrolle: Mit Rundungen ist $s(x)=-0{,}19x+1{,}48$]

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.2 CAS: Höhenprofil (Fortsetzung)

g) Die Gerade s liegt stets oberhalb des Graphen von f.

Ermitteln Sie den maximalen vertikalen Abstand zwischen den Graphen im Intervall $[2;6]$.

Ähnlich verlaufende Höhenprofile können allgemein durch Gleichungen der Form $h(x) = (x+a)\cdot e^{b\cdot x}, (a > 0, b < 0)$, beschrieben werden. Von einem bestimmten solchen Höhenprofil h_W sind die folgenden Angaben bekannt:

x in km	0	6
Höhe $h_W(x)$ in km	1,2	0,3

h) Untersuchen Sie, bei welchem der beiden Höhenprofile f und h_W der Betrag der mittleren Steigung im Intervall $[0;6]$ größer ist.

Ermitteln Sie für den vorliegenden Fall a und b.

Weisen Sie nach, dass es genau eine positive Stelle x gibt, an der die Steigungen der beiden Höhenprofile f und h_W gleich sind. Geben Sie die Steigung an.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile									
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	4	6	4	4	4	4	5	9	40

Aufgabe 2.1 CAS: Brücke

Die Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Brücke über die Autobahn.

Der Verlauf der seitlichen Streben kann modellhaft im Koordinatensystem durch die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 5)$, $B(4{,}4 \mid 44 \mid 5)$, $C(0{,}2 \mid 2 \mid 7)$ und $D(4{,}8 \mid 48 \mid 9)$ beschrieben werden.
Die Fahrbahn unterhalb der Brücke liegt in der *x*-*y*-Ebene. [1 Längeneinheit = 1 m]

a) Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in der Ebene *E*.

Ermitteln Sie einen Normalenvektor der Ebene *E* und geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an.

[Zur Kontrolle für $E: -10x + y = 0$]

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt *D* in der Ebene *E* liegt.

Zeigen Sie, dass die Ebene *E* orthogonal zur *x*-*y*-Ebene liegt.

c) Die Punkte *A* und *B* liegen auf der Geraden *g*, die Punkte *C* und *D* liegen auf der Geraden *h*.

Begründen Sie, dass die Geraden *g* und *h* einen Schnittpunkt haben müssen.

Berechnen Sie den Winkel unter dem sich die Geraden *g* und *h* schneiden.

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn auf die Brücke zu. Zunächst befindet es sich im Punkt *P* (82 | 40 | 0) und 1,5 s später im Punkt *Q* (42 | 36 | 0).

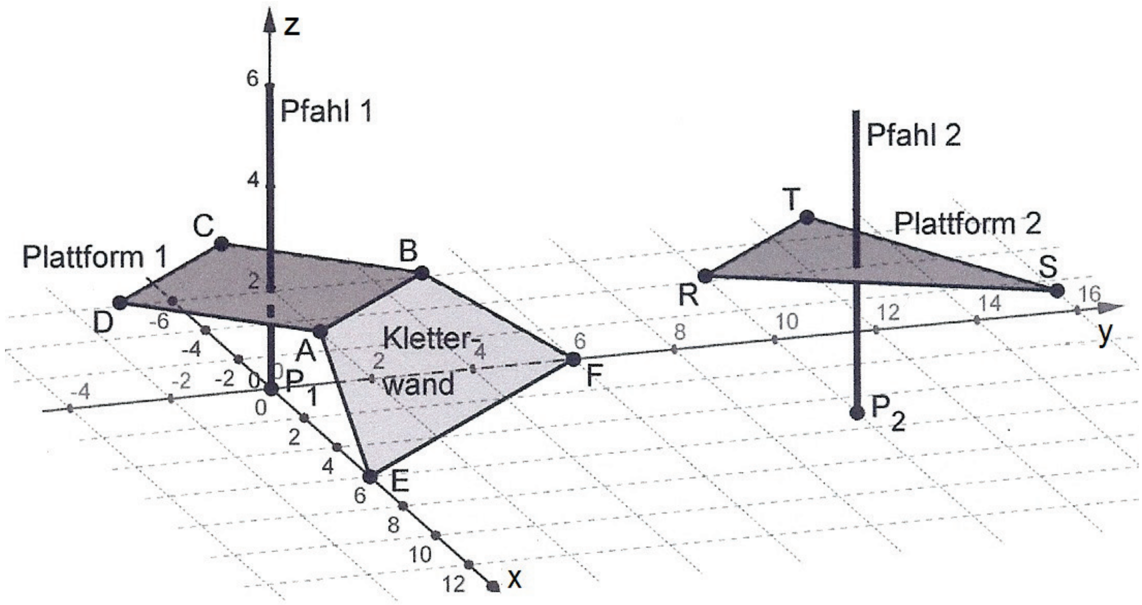
d) Berechnen Sie, welche Strecke das Fahrzeug in diesen 1,5 s zurückgelegt hat.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und geben Sie diese in $\frac{km}{h}$ an.

e) Das Fahrzeug fährt unverändert geradlinig weiter.
Ermitteln Sie, wie lange das Fahrzeug benötigt, um vom Punkt *Q* bis zu dem Punkt zu gelangen, der genau vertikal unter der Strebe durch *A* und *B* liegt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	3	6	2	5	20

Aufgabe 2.2 CAS: Kletteranlage

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die *x*-*y*- Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0\,|\,0\,|\,0)$ und $P_2(5\,|\,10\,|\,0)$ dargestellt. Außerdem sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(3\,|\,0\,|\,2)$, $B(0\,|\,3\,|\,2)$, $E(6\,|\,0\,|\,0)$, $F(0\,|\,6\,|\,0)$, $R(5\,|\,7\,|\,3)$, $S(8\,|\,13\,|\,3)$ und $T(2\,|\,10\,|\,3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a) In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

b) Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Die Punkte *A*, *B*, *E* und *F* liegen in der Ebene $L: 2x + 2y + 3z - 12 = 0$.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

Auf die Anlage treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden beschrieben werden. Die Eckpunkte der Plattform 2 werden durch *R*, *S* und *T* dargestellt, die zugehörigen Eckpunkte des Schattens dieser Plattform durch $R'(4\,|\,2\,|\,0)$, S' bzw. $T'(1\,|\,5\,|\,0)$.

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass T' auf der Strecke $\overline{EF}$ liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten von S' und stellen Sie den Schatten der Plattform 2 in der obigen Abbildung grafisch dar.

Fortsetzung siehe nächste Seite.

Aufgabe 2.2 CAS: Kletteranlage (Fortsetzung)

e) Über ein Drahtseil kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Der eine Endpunkt dieses Seils ist am Pfahl 1 auf der Höhe der Plattform 1 befestigt, der andere am Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. Das Seil ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es geradlinig verläuft. Es berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch $\overline{RT}$ dargestellt wird.

Bestimmt werden soll der Punkt am Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2, in dem das Seil befestigt ist. Beschreiben Sie, wie man den Abstand dieses Punkts von der Plattform 2 berechnen könnte, wenn bekannt wäre, in welchem Verhältnis die durch $\overline{RT}$ dargestellte Seite der Plattform durch den Berührpunkt des Seils geteilt wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	3	3	3	6	5	20

Aufgabe 3.1 CAS: Gewinnspiel

Bei einem Schulfest wird ein Gewinnspiel angeboten. Dafür befinden sich in einem Topf äußerlich nicht sichtbar 2 schwarze Kugeln und 4 weiße Kugeln.

Bei einem Spiel werden zwei Kugeln mit einem Griff, also ohne Zurücklegen, aus dem Topf gezogen.

Der Einsatz für ein Spiel beträgt 1 €. Nur wenn unter den zwei gezogenen Kugeln keine schwarze Kugel ist, gewinnt der Spieler. In diesem Fall werden ihm 2 € ausgezahlt. In allen anderen Fällen ist der Einsatz verloren.

Nach jedem Spiel werden die beiden Kugeln wieder in den Topf gelegt.

a) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $p = 0{,}4$ beträgt.

b) Ein Spieler spielt das Spiel 10mal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
A: Er gewinnt genau 4 der 10 Spiele.
B: Er gewinnt das erste Spiel und von den übrigen 9 noch mindestens vier Spiele.

c) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
C: „Wenigstens eins von *n* Spielen wird gewonnen“ ist $P(C)$.
Eine Spielerin behauptet, dass $P(C)$ kleiner wird, wenn *n* größer wird.

Entscheiden Sie anhand der Berechnung von zwei gewählten Wahrscheinlichkeiten, ob die Behauptung richtig ist.

d) Zeigen Sie, dass das Spiel aus Sicht des Anbieters auf lange Sicht gewinnbringend ist.

e) Ein Teilnehmer schlägt vor, die Anzahl der Kugeln so zu erhöhen, dass das Spiel fair wird. Dazu soll die Anzahl der weißen Kugeln um 11 erhöht werden und die der schwarzen Kugeln um die Anzahl *x*.
Gezogen werden jetzt wieder 2 Kugeln mit einem Griff und gewonnen wird nur, wenn keine schwarze Kugel unter den zwei gezogenen Kugeln ist.

Zeigen Sie, dass mit der Zugabe von $x = 2$ schwarzen Kugeln die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht $q = 0{,}5$ beträgt, das Spiel also nicht fair ist.

Ermitteln Sie, wie viele schwarze Kugeln in den Topf zugegeben werden müssen, damit das Spiel fair wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	5	5	2	6	20

Aufgabe 3.2 CAS: Bildschirme

Eine Firma stellt Flachbildschirme her. Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft.
B: Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 30 und weniger als 50 fehlerhaft.

b) Bestimmen Sie die Anzahl fehlerhafter Bildschirme, die unter 250 zufällig ausgewählten Geräten mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Wird eine Stichprobe von Bildschirmen um einen zufällig ausgewählten Bildschirm ergänzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Geräte fehlerfrei sind, nach der Ergänzung geringer als vorher.“

d) Der Herstellungsprozess soll verbessert werden. Damit soll erreicht werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 zufällig ausgewählten Bildschirmen keiner fehlerhaft ist, mindestens 10 % beträgt.
Ermitteln Sie, wie groß der Anteil fehlerhafter Geräte nach der Verbesserung höchstens sein darf.

Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- das Netzteil defekt ist, 3,0 %.

e) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Bildschirm mit defektem Display ein defektes Netzteil besitzt.

g) Jeder Bildschirm wird vor der Auslieferung abschließend geprüft. Von vierzig abschließend geprüften Bildschirmen, unter denen sechs fehlerhaft sind, werden nacheinander zehn zufällig ausgewählt.

Beurteilen Sie, ob die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile								
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	4	2	3	4	3	2	2	20