Zentrale schriftliche Abiturprüfung **2018**

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

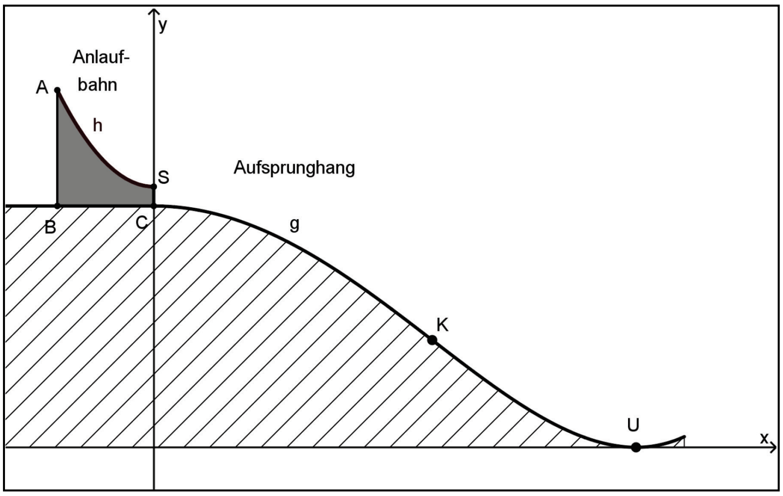
Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Skisprunganlage

Die Abbildung zeigt das Profil einer Skisprunganlage.

Die Anlaufbahn ist die Oberseite des Bauwerks *ABCS*. Sie wird von *A* bis *S* durch den Graphen der Funktion *h* beschrieben. Die Punkte *S* und *C* liegen auf der *y*-Achse. Die Strecke von *B* nach *C* liegt waagerecht und ist 20 m lang.

Der Aufsprunghang beginnt am Punkt *C* und wird durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben.



Die Funktionen *g* und *h* sind gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{1}{2000} x^4 - 10x^2 + 50\,000 \right) \quad \text{und} \quad h(x) = 0{,}05x^2 + 54\,.$$

Maßstab: $1\,\text{LE} = 1$ m

a) Berechnen Sie, wie viel höher der Punkt S als der Punkt C liegt.
Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

b) Ermitteln Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Bauwerks *ABCS.*

c) Der Punkt U liegt an der tiefsten Stelle des Aufsprunghangs *g*.
Ermitteln Sie rechnerisch Lage und Art aller lokalen Extrempunkte des Graphen von g und entscheiden Sie, welcher der Extrempunkte dem Punkt U entspricht.
[Kontrollergebnis: $g'(x) = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{1}{500} x^3 - 20x \right)$]

d) Von besonderer Bedeutung für die Konstruktion einer Skisprunganlage ist der Punkt *K*, in dem der Aufsprunghang sein stärkstes Gefälle aufweist.
Berechnen Sie die Koordinaten von *K*. Für die Ermittlung der *x*-Koordinate von *K* genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung.

e) Die Flugbahn eines Skispringers wird durch eine quadratische Funktion f beschrieben. Im Punkt *S* geht die Anlaufbahn *h* ohne Knick in diese Flugbahn über. Bei $x = 60$ m hat der Springer eine vertikale Höhe von 4,72 m über dem Aufsprunghang.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Flugbahn.
[Zur Kontrolle: $f(x) = -0{,}008\,x^2 + 54$]

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.1: Skisprunganlage (Fortsetzung)

f) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem der Springer auf dem Aufsprunghang landet.

Skizzieren Sie die Flugbahn in dem gegebene Koordinatensystem (siehe unten).

[Zur Kontrolle: $L(73{,}9 \mid 10{,}3)$]

g) Aus Sicherheitsgründen darf der vertikale Abstand des Springers zum Aufsprunghang während des Sprunges nicht zu groß werden.

Weisen Sie nach, dass der maximale vertikale Abstand zum Hang während des Fluges höchstens 6 m beträgt.

Auf die Verwendung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	3	5	6	4	6	10	6	40

Aufgabe 1.2: Höhenprofil

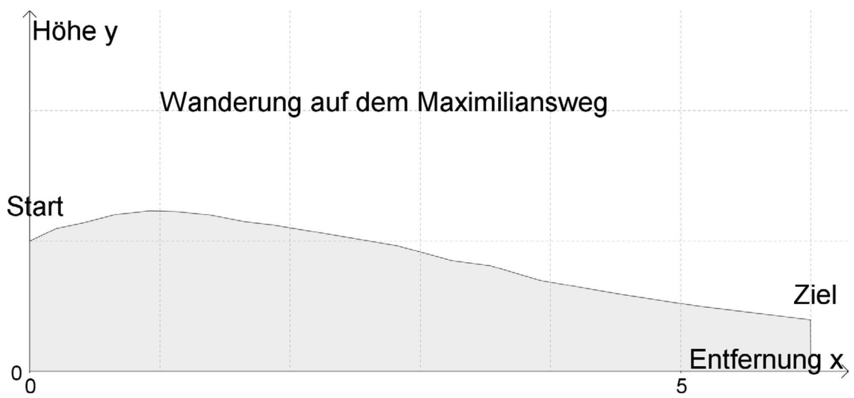
Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch ihre Gleichungen
$f(x) = (x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}$ sowie $g(x) = x+1$.
Die Graphen der Funktionen sind in der Anlage dargestellt.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$.

b) Die Graphen der Funktionen *f* und *g* schneiden die *y*-Achse im Punkt $S(0\,|\,1)$.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Tangente an den Graphen der Funktion *f* und die Gerade *g* im Punkt *S* schneiden.
[zur Kontrolle: $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\cdot e^{-0,5\cdot x}$]

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion *F* mit der Gleichung $F(x) = (-2x-6)\cdot e^{-0,5\cdot x}$ eine Stammfunktion von *f* ist.
Die Graphen der Funktionen *f* und *g* schließen im 2. Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt *A* vollständig ein.
Zeigen Sie, dass beide Funktionen nur an der Stelle *x* = –1 eine Nullstelle besitzen.
Berechnen Sie den Wert von *A*.

Die Abbildung zeigt das Höhenprofil für einen Wanderweg im Mittelgebirge. Vereinfacht soll das Höhenprofil durch die Funktion *f* mit $f(x) = (x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}, 0 \le x \le 6$, beschrieben werden. (1 LE = 1 km)



d) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes des Höhenprofils.
(Die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.)

e) Im Intervall $[2;6]$ kann das Höhenprofil näherungsweise durch eine Gerade ersetzt werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2|f(2))$ und $(6|f(6))$.

f) Weisen Sie nach, dass es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle gibt, an der die Steigung des durch *f* beschriebenen Höhenprofils kleiner als -0,222 ist.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.2: Höhenprofil (Fortsetzung)

g) Ähnlich verlaufende Höhenprofile können allgemein durch Gleichungen der Form $h(x) = (x+a)\cdot e^{b\cdot x}, (a>0, b<0)$, beschrieben werden. Von einem bestimmten solchen Höhenprofil h_W sind die folgenden Angaben bekannt:

x in km	0	6
Höhe $h_W(x)$ in km	1,2	0,3

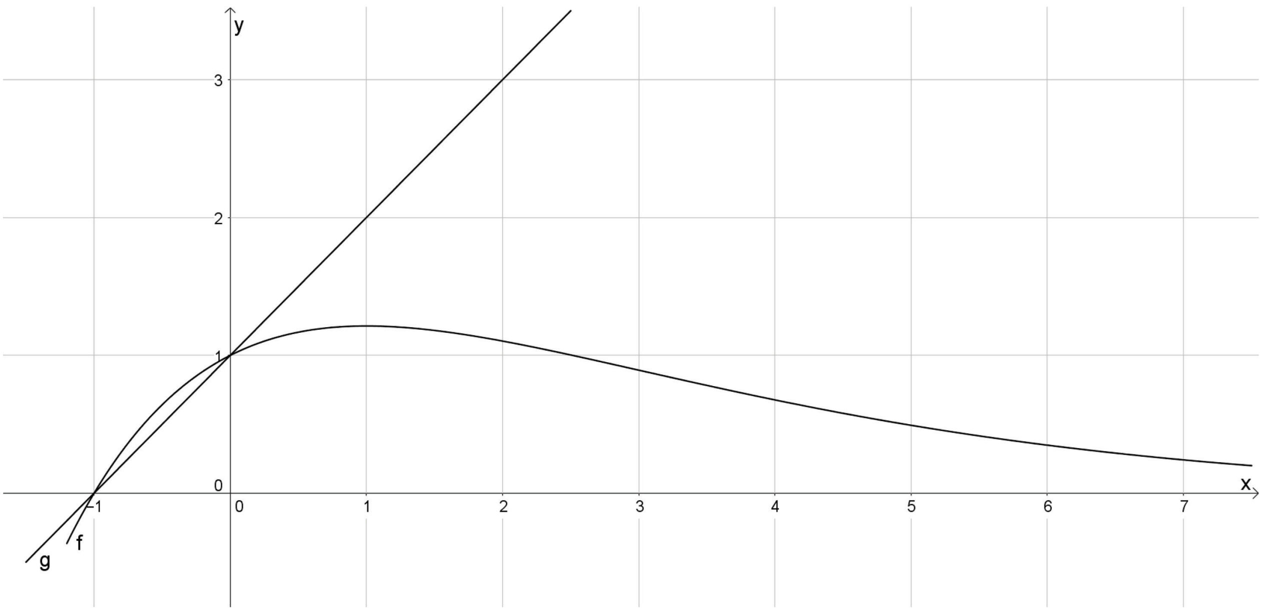
Untersuchen Sie, bei welchem der beiden Höhenprofile *f* und h_W der Betrag der mittleren Steigung im Intervall $[0;6]$ größer ist.

Ermitteln Sie für den vorliegenden Fall *a* und *b*.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile								
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	7	9	4	4	5	9	40

Anlage zu 1.2: Höhenprofil

Darstellung der Graphen der Funktionen *f* und *g*



Aufgabe 2.1: Brücke

Die Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Brücke über die Autobahn.

Der Verlauf der seitlichen Streben kann modellhaft im Koordinatensystem durch die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,5)$, $B(4{,}4\,|\,44\,|\,5)$, $C(0{,}2\,|\,2\,|\,7)$ und $D(4{,}8\,|\,48\,|\,9)$ beschrieben werden.
Die Fahrbahn unterhalb der Brücke liegt in der *x*-*y*-Ebene. [1 Längeneinheit = 1 m]

a) Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in der Ebene *E*.

Ermitteln Sie einen Normalenvektor der Ebene *E* und geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an.

[Zur Kontrolle für $E: -10x + y = 0$]

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt *D* in der Ebene *E* liegt.

Zeigen Sie, dass die Ebene *E* orthogonal zur *x*-*y*-Ebene liegt.

c) Die Punkte *A* und *B* liegen auf der Geraden *g*, die Punkte *C* und *D* liegen auf der Geraden *h*.

Begründen Sie, dass die Geraden *g* und *h* einen Schnittpunkt haben müssen.

Berechnen Sie den Winkel unter dem sich die Geraden *g* und *h* schneiden.

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn auf die Brücke zu. Zunächst befindet es sich im Punkt *P* (82 | 40 | 0) und 1,5 s später im Punkt *Q* (42 | 36 | 0).

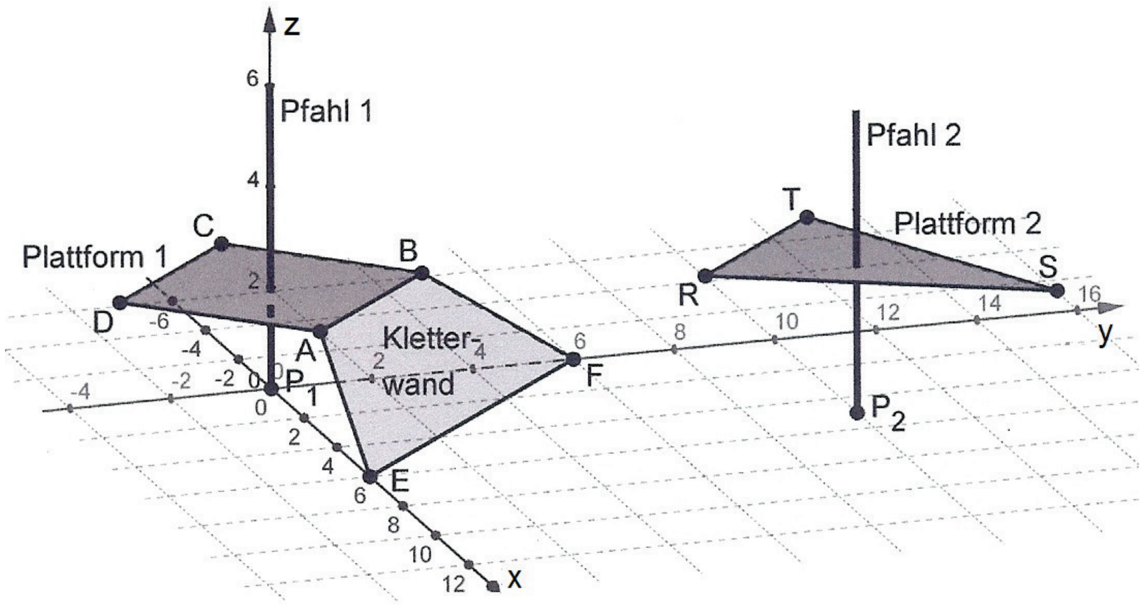
d) Berechnen Sie, welche Strecke das Fahrzeug in diesen 1,5 s zurückgelegt hat.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und geben Sie diese in $\frac{km}{h}$ an.

e) Das Fahrzeug fährt unverändert geradlinig weiter.
Ermitteln Sie, wie lange das Fahrzeug benötigt, um vom Punkt *Q* bis zu dem Punkt zu gelangen, der genau vertikal unter der Strebe durch *A* und *B* liegt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	3	6	2	5	20

Aufgabe 2.2: Kletteranlage

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die *x*-*y*- Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0\,|\,0\,|\,0)$ und $P_2(5\,|\,10\,|\,0)$ dargestellt. Außerdem sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(3\,|\,0\,|\,2)$, $B(0\,|\,3\,|\,2)$, $E(6\,|\,0\,|\,0)$, $F(0\,|\,6\,|\,0)$, $R(5\,|\,7\,|\,3)$, $S(8\,|\,13\,|\,3)$ und $T(2\,|\,10\,|\,3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a) In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

b) Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Die Punkte *A*, *B*, *E* und *F* liegen in der Ebene $L: 2x + 2y + 3z - 12 = 0$.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

Auf die Anlage treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden beschrieben werden. Die Eckpunkte der Plattform 2 werden durch *R*, *S* und *T* dargestellt, die zugehörigen Eckpunkte des Schattens dieser Plattform durch $R'(4\,|\,2\,|\,0)$, S' bzw. $T'(1\,|\,5\,|\,0)$.

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass T' auf der Strecke $\overline{EF}$ liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten von S' und stellen Sie den Schatten der Plattform 2 in der obigen Abbildung grafisch dar.

Fortsetzung siehe nächste Seite.

Aufgabe 2.2: Kletteranlage (Fortsetzung)

e) Über ein Drahtseil kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Der eine Endpunkt dieses Seils ist am Pfahl 1 auf der Höhe der Plattform 1 befestigt, der andere am Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. Das Seil ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es geradlinig verläuft. Es berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch $\overline{RT}$ dargestellt wird.

Bestimmt werden soll der Punkt am Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2, in dem das Seil befestigt ist. Beschreiben Sie, wie man den Abstand dieses Punkts von der Plattform 2 berechnen könnte, wenn bekannt wäre, in welchem Verhältnis die durch $\overline{RT}$ dargestellte Seite der Plattform durch den Berührpunkt des Seils geteilt wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	3	3	3	6	5	20

Aufgabe 3.1: Gewinnspiel

Bei einem Schulfest wird ein Gewinnspiel angeboten. Dafür befinden sich in einem Topf äußerlich nicht sichtbar 2 schwarze Kugeln und 4 weiße Kugeln.

Bei einem Spiel werden zwei Kugeln mit einem Griff, also ohne Zurücklegen, aus dem Topf gezogen.

Der Einsatz für ein Spiel beträgt 1 €. Nur wenn unter den zwei gezogenen Kugeln keine schwarze Kugel ist, gewinnt der Spieler. In diesem Fall werden ihm 2 € ausgezahlt. In allen anderen Fällen ist der Einsatz verloren.

Nach jedem Spiel werden die beiden Kugeln wieder in den Topf gelegt.

a) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $p = 0{,}4$ beträgt.

b) Ein Spieler spielt das Spiel 10mal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
A: Er gewinnt genau 4 der 10 Spiele.
B: Er gewinnt das erste Spiel und von den übrigen 9 noch höchstens eins.

c) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
C: „Wenigstens eins von *n* Spielen wird gewonnen“ ist $P(C)$.
Eine Spielerin behauptet, dass $P(C)$ kleiner wird, wenn *n* größer wird.

Entscheiden Sie anhand der Berechnung von zwei gewählten Wahrscheinlichkeiten, ob die Behauptung richtig ist.

d) Zeigen Sie, dass das Spiel aus Sicht des Anbieters auf lange Sicht gewinnbringend ist.

e) Ein Teilnehmer schlägt vor, die Anzahl der Kugeln so zu erhöhen, dass das Spiel fair wird. Dazu soll die Anzahl der weißen Kugeln um 11 erhöht werden und die der schwarzen Kugeln um die Anzahl *x*.
Gezogen werden jetzt wieder 2 Kugeln mit einem Griff und gewonnen wird nur, wenn keine schwarze Kugel unter den zwei gezogenen Kugeln ist.

Zeigen Sie, dass mit der Zugabe von $x = 2$ schwarzen Kugeln die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht $q = 0{,}5$ beträgt, das Spiel also nicht fair ist.

Ermitteln Sie, wie viele schwarze Kugeln in den Topf zugegeben werden müssen, damit das Spiel fair wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	5	5	2	6	20

Aufgabe 3.2: Bildschirme

Eine Firma stellt Flachbildschirme her. Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a) 50 Bildschirme werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von den ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft.
B: Von den ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 10 und weniger als 15 fehlerhaft.

b) Bestimmen Sie die Anzahl fehlerhafter Bildschirme, die unter 250 zufällig ausgewählten Geräten mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Wird eine Stichprobe von Bildschirmen um einen zufällig ausgewählten Bildschirm ergänzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Geräte fehlerfrei sind, nach der Ergänzung geringer als vorher.“

d) Der Herstellungsprozess soll verbessert werden. Damit soll erreicht werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 zufällig ausgewählten Bildschirmen keiner fehlerhaft ist, mindestens 10 % beträgt.
Ermitteln Sie, wie groß der Anteil fehlerhafter Geräte nach der Verbesserung höchstens sein darf.

Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- das Netzteil defekt ist, 3,0 %.

e) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Bildschirm mit defektem Display ein defektes Netzteil besitzt.

g) Jeder Bildschirm wird vor der Auslieferung abschließend geprüft. Von vierzig abschließend geprüften Bildschirmen, unter denen sechs fehlerhaft sind, werden nacheinander zehn zufällig ausgewählt.

Beurteilen Sie, ob die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile								
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	4	2	3	4	3	2	2	20

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.2: Bildschirme

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“, alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
50	0	0769	0052	0001								49	50
	1	2794	0338	0012	0002							48	
	2	5405	1117	0066	0013	0001						47	
	3	7604	2503	0238	0057	0005						46	
	4	8964	4312	0643	0185	0021	0002					45	
	5	9622	6161	1388	0480	0070	0007	0001				44	
	6	9882	7702	2506	1034	0194	0025	0005				43	
	7	9968	8779	3911	1904	0453	0073	0017				42	
	8	9992	9421	5421	3073	0916	0183	0050	0002			41	
	9	9998	9755	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0001		40	
	10		9906	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0002		39	
	11		9968	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0006		38	
	12		9990	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0018	0002	37	
	13		9997	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0045	0005	36	
	14		9999	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0104	0013	35	
	15			9943	9692	8369	5692	3690	0955	0220	0033	34	
	16			9978	9856	9017	6839	4868	1561	0427	0077	33	
	17			9992	9937	9449	7822	6046	2369	0765	0164	32	
	18			9997	9975	9713	8594	7126	3356	1273	0325	31	
	19			9999	9991	9861	9152	8036	4465	1974	0595	30	
	20				9997	9937	9522	8741	5610	2862	1013	29	
	21				9999	9974	9749	9244	6701	3900	1611	28	
	22					9990	9877	9576	7660	5019	2399	27	
	23					9996	9944	9778	8438	6134	3359	26	
	24					9999	9976	9892	9022	7160	4439	25	
	25						9991	9951	9427	8034	5561	24	
	26						9997	9979	9686	8721	6641	23	
	27						9999	9992	9840	9220	7601	22	
	28							9997	9924	9556	8389	21	
	29							9999	9966	9765	8987	20	
	30								9986	9884	9405	19	
	31								9995	9947	0675	18	
	32								9998	9978	0936	17	
	33								9999	9991	9923	16	
	34									9997	9967	15	
	35									9999	9987	14	
	36										9995	13	
	37										9998	12	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											