Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2012/2013

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Erwartungs- horizonte	Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellte werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler).
Prüfungstag	**13. Mai 2013**
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil; Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch
Spezielle Arbeitshinweise	Aus den fünf Aufgaben **müssen drei** ausgewählt werden. Die **Aufgabe 1** (Exponentialfunktionen) ist eine **Pflichtaufgabe**. Sie **muss** von allen bearbeitet werden! Zwischen **Aufgabe 2** (Gebrochenrationale Funktionen) und **Aufgabe 3** (Trigonometrische Funktionen) muss **gewählt** werden. Auch zwischen **Aufgabe 4** (Analytische Geometrie) und **Aufgabe 5** (Stochastik) muss **gewählt werden**. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.**

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte

Aufgabe Nr.	**Soll %**
1	34
2 oder 3	33
4 oder 5	33
Summe:	**100**

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (2-4x) \cdot e^{2x}$.

1.1 Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f. **/3**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen von f für $x \to \pm\infty$. **/2**

1.3 Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von f. **/6**

[zur Kontrolle: $f'(x) = -8x \cdot e^{2x}$]

1.4 (1) Weisen Sie nach, dass der Graph von f einen Wendepunkt besitzt. Geben Sie diesen an. **/8**

Hinweis: Auf einen Nachweis mittels Vorzeichenkriterium oder dritte Ableitung kann verzichtet werden.

(2) Zeigen Sie, dass die Wendetangente w durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$w(x) = \frac{4}{e}x + \frac{6}{e}\ .$$

1.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [–3 ; 0,7]. Ergänzen Sie dafür die folgende Wertetabelle und verwenden Sie Ihre bisherigen Ergebnisse. **/4**

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	0,7
$f(x)$	0,035		0,18			–3,24

Verwenden Sie folgende Einteilung x-Achse: $1\,\text{cm} \triangleq 0,5$ Einheiten
y-Achse: $1\,\text{cm} \triangleq 0,5$ Einheiten .

Zeichnen Sie auch die Wendetangente in das Koordinatensystem.

1.6 Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse, der senkrechten Geraden zu $x = -2$ und der y-Achse im zweiten Quadranten eine Fläche ein. **/5**

(1) Kennzeichnen Sie die Fläche in Ihrer Skizze zu Aufgabe 1.5.

(2) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (2-2x) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist.

(3) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.7 Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse, der senkrechten Geraden zu $x = t$ $(t < 0)$ und der y-Achse im zweiten Quadranten eine Fläche ein, die sich für $t \to -\infty$ ins Unendliche erstreckt.
Prüfen Sie, ob die Fläche dennoch einen endlichen Inhalt besitzt. **/3**

1.8 Jede Tangente an den Graphen der Funktion f im 2. Quadranten schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Für zwei dieser Tangenten ist dieses Dreieck gleichschenklig.
Welche gemeinsame Eigenschaft müssen diese Tangenten haben? Begründen Sie Ihre Antwort. **/3**

Hinweis: Sie müssen die Gleichungen dieser Tangenten nicht ermitteln.

2 Gebrochenrationale Funktionen **/33**

Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = \frac{9x^2 - 3x - 6}{2(x+1)(x-2)} \ .$$

2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von f. **/3**

2.2 Ermitteln Sie die Polstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion in deren Umgebung. **/4**

2.3 Zeigen Sie, dass $a(x) = 4{,}5$ die Funktionsgleichung der waagerechten Asymptote des Graphen von f ist. **/5**

2.4 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/7**

x	–10	–6	–3	–1,5	–0,5	0	0,5	3	5	10
$f(x)$	4,28	4,2		5,36				8,25		4,91

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und den der waagerechten Asymptote unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse in das gegebene Koordinatensystem – ***siehe nächste Seite***.

2.5 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f und a. **/4**

2.6 Ein waagerechter Streifen im Koordinatensystem ist in y-Richtung durch das lokale Minimum von f nach oben und durch das lokale Maximum von f nach unten begrenzt. Berechnen Sie die Breite dieses Streifens in y-Richtung. **/8**

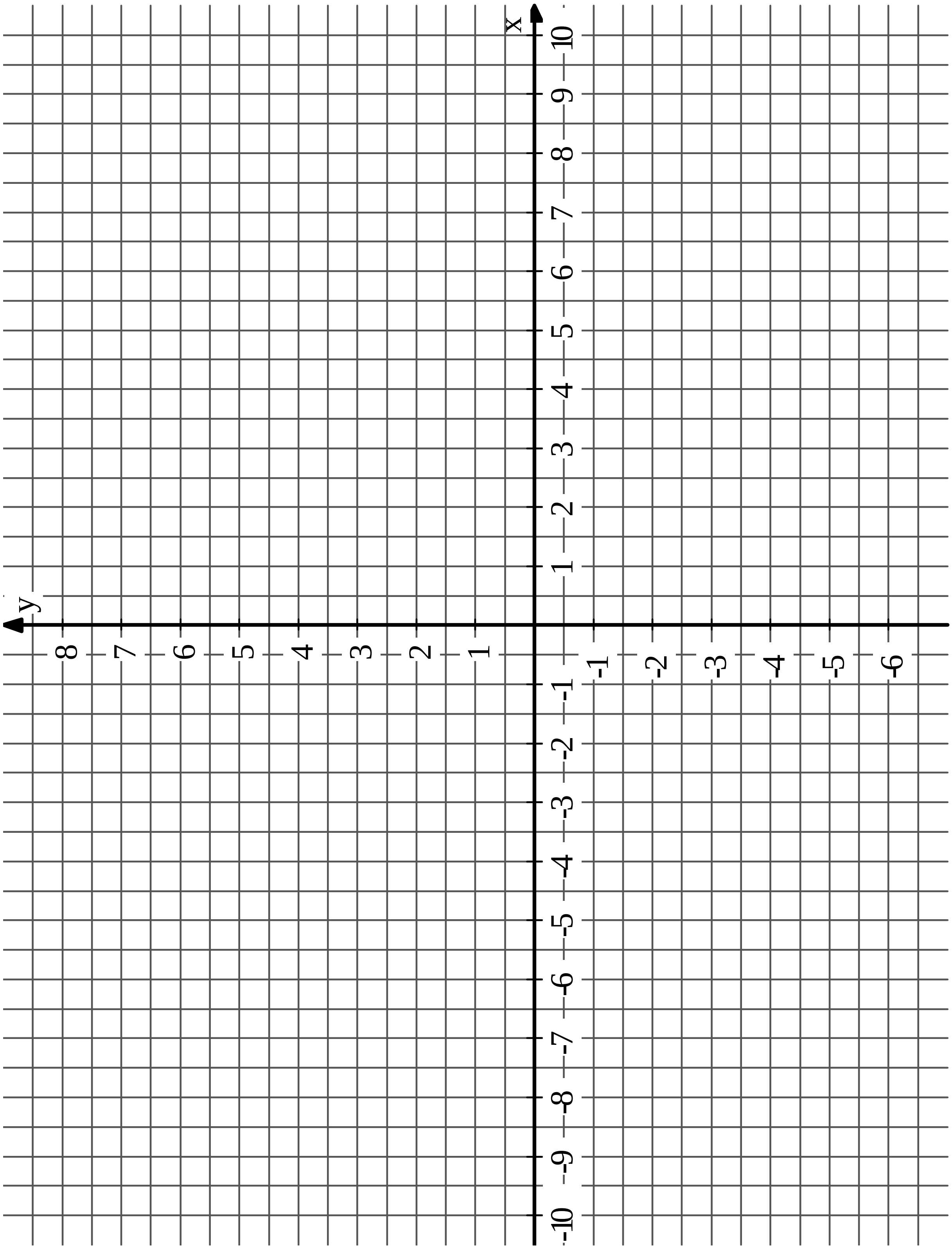
[zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-12x \cdot (x+4)}{(2x^2 - 2x - 4)^2}$]

Hinweis: Die Regel vom Vorzeichenwechsel oder der Nachweis mittels der zweiten Ableitung zur Feststellung der Extremstellen wird nicht gefordert.

2.7 Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an. **/2**

Koordinatensystem für Aufgabe 2.4 → nächste Seite

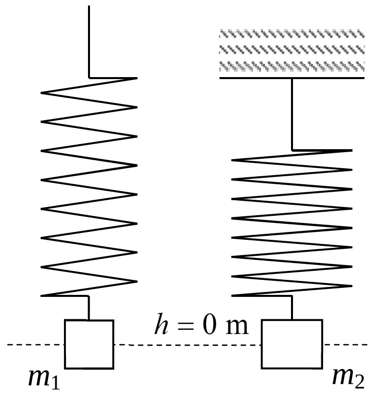
Koordinatensystem für Aufgabe 2.4



3 Trigonometrische Funktionen

/33

Zwei Stahlfedern mit angehängter Masse m_1 bzw. m_2 schwingen nebeneinander periodisch senkrecht auf und ab (siehe Abbildung).
Die erste Stahlfeder wird mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht nach oben bewegt.
Die zweite Feder hängt fest an einer Decke.



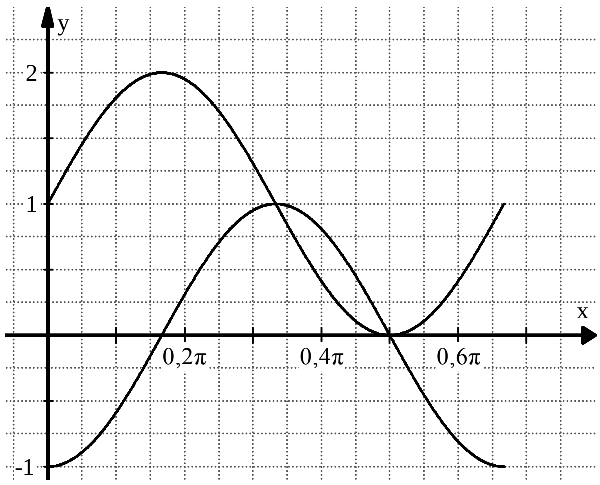
Für $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ wird die **Geschwindigkeit** der Masse m_1 durch die Funktion f mit

$f(x) = 1 - \sin(3x - \pi)$ beschrieben.

Die **Geschwindigkeit** der Masse m_2 wird durch die Funktion g mit

$g(x) = \cos(3x - \pi)$ beschrieben.

Hierbei wird x in Sekunden und $f(x)$ bzw. $g(x)$ in Metern pro Sekunde gemessen.



3.1 Beschriften Sie die dargestellten Graphen mit f bzw. g. **/3**

Begründen Sie Ihre Zuordnung.

3.2 Weisen Sie nach, dass $x_{S1} = \frac{1}{3}\pi$ und $x_{S2} = \frac{1}{2}\pi$ die Schnittstellen von f und g sind. **/6**

Geben Sie an, wie schnell die an den Stahlfedern hängenden Massen zu diesen beiden Zeitpunkten sind.

3.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen der Funktion f. **/7**

3.4 Die Stammfunktionen der Funktionen f und g beschreiben den jeweiligen Ort der beiden schwingenden Massen. **/5**

Berechnen Sie die Stammfunktionen von f und g so, dass sich beide Massen zum Zeitpunkt $x = 0\,\text{s}$, wie in der Darstellung der beiden Federn abgebildet, in der Höhe $h = 0\,\text{m}$ befinden.

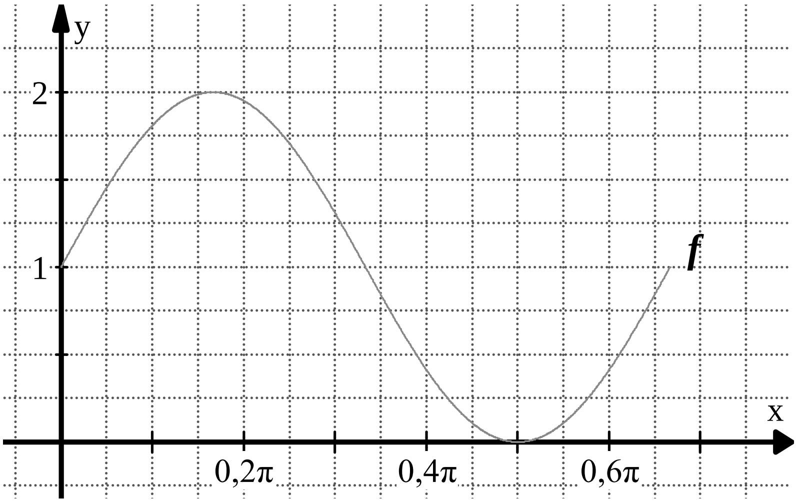
[zur Kontrolle: $F(x) = x + \frac{1}{3}\cos(3x - \pi) + \frac{1}{3}$ und $G(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - \pi)$]

3.5 Berechnen Sie $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. **/5**

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

3.6 Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der in Aufgabe 3.4 ermittelten Stammfunktion F für $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ in das vorgegebene Diagramm. **/7**

Begründen Sie die Lage der möglichen Extrem- und Wendestellen von F durch den Zusammenhang mit f (ohne Rechnungen).



4 Analytische Geometrie /33

Die Abbildung zeigt die äußere Form eines Wohnhauses mit Solardach. Der Boden des Hauses und zwei Seitenflächen liegen jeweils in den Koordinatenebenen. Die schräge Dachfläche *ABCD* liegt in der Ebene *E* und ist mit Solarzellen belegt. Das mittig eingelassene Dachfenster entspricht einem Rechteck und hat folgende Maße: Breite 1 m, Länge 2 m, 1 LE $\triangleq$ 1 m.

Hinweis: Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

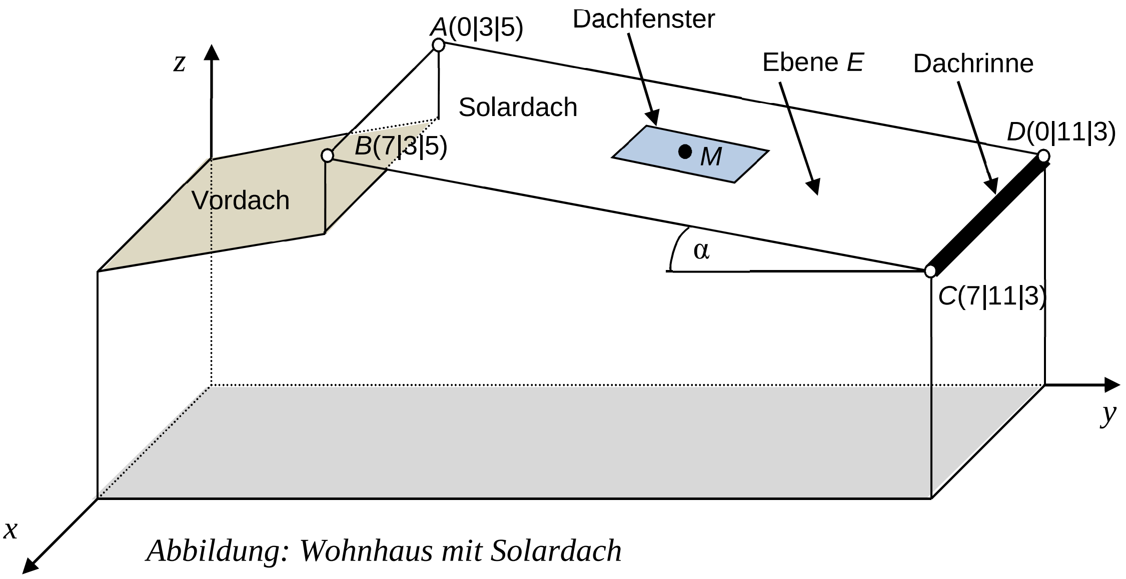


Abbildung: Wohnhaus mit Solardach

4.1 Zur Entwässerung des Daches ist zwischen den Punkten *C* und *D* eine Dachrinne angebracht.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden *g*, auf der diese Dachrinne liegt, und die Länge der Dachrinne. **/3**

4.2 Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* der schrägen Dachfläche *ABCD* (Solardach) in Parameter- und in Koordinatenform an. **/6**

[mögliches Ergebnis für *E* in Koordinatenform: $E: y + 4z = 23$]

4.3 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M(x_M \mid y_M \mid z_M)$ des mittig eingelassenen Dachfensters an. **/2**

4.4 Die gesamte Dachschräge, mit Ausnahme des Dachfensters, ist mit Solarzellen belegt. Bestimmen Sie den Gesamtflächeninhalt der Solarzellen. **/3**

4.5 Bestimmen Sie den Neigungswinkel α der Dachschräge (siehe Abbildung). **/5**

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

4.6 Das in der Abbildung dargestellte Vordach liegt in der Ebene **/4**

$$V:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Höhe des senkrechten Dachabschnitts zwischen Vordach und Solardach unterhalb von *AB*.

4.7 Für einen maximalen Wirkungsgrad der Solaranlage müssen die Sonnenstrahlen senkrecht (orthogonal) auf die Solarzellen treffen. **/2**
Bestimmen Sie einen Richtungsvektor dieser Sonnenstrahlen.

4.8 Bestimmen Sie (z. B. mit Hilfe der Hesseschen Normalform) den Abstand der Ebene *E* zum Koordinatenursprung $O(0\,|\,0\,|\,0)$. **/3**

4.9 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene *V* des Vordaches (siehe Aufgabe 4.6) mit der Ebene *E* des Solardaches. **/5**

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Auf einer Insel ist Parfüm mit einem hohen Einfuhrzoll belegt. Es werden regelmäßig Kontrollen durchgeführt, ob Ankömmlinge Parfüm auf die Insel schmuggeln wollen.

Im letzten Jahr wurden bei 13846 kontrollierten Ankömmlingen 180 Personen mit Parfüm im Gepäck entdeckt. Die Zahlen decken sich in etwa mit denen der Vorjahre.

5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig kontrollierter Ankömmling Parfüm bei sich hat. Geben Sie diese auch in Prozent an. /2

5.2 Ermitteln Sie, z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms, folgende Wahrscheinlichkeiten /4
§ Von drei kontrollierten Personen führt die dritte Person Parfüm bei sich.
§ Von drei kontrollierten Personen haben genau zwei Personen Parfüm im Gepäck.

5.3 Wie lautet das Gegenereignis zum Ereignis E: „Unter den ersten drei kontrollierten Personen ist mindestens eine, die Parfüm im Gepäck hat.“? /3
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.
Berechnen Sie nun auch die Wahrscheinlichkeit von E.

Für eine Untersuchung des Schmuggelproblems wurde einen Monat lang genau kontrolliert. In dem Bericht steht: … *Es wurden insgesamt 936 Personen, davon 563 Männer, kontrolliert. Unter den erwischten Schmugglern waren 22 Männer und 17 Frauen.* …

5.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden drei Ereignisse, z. B. mit einer Vierfeldertafel. /6
A: Eine in diesem Monat zufällig ausgewählte Person war ein Schmuggler.
B: Eine in diesem Monat zufällig ausgewählte Person war ein Mann.
C: Eine in diesem Monat zufällig ausgewählte Person war eine weibliche Schmugglerin.

5.5 Ist die Tatsache, dass jemand versucht, Parfüm auf die Insel zu bringen, stochastisch vom Geschlecht abhängig? Begründen Sie durch eine Rechnung. /3

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ankömmling auf die Insel Parfüm schmuggelt, beträgt $p = 0{,}013$ (siehe Aufgabe 5.1). Die Zöllner wollen die nächsten 100 Ankömmlinge kontrollieren.

5.6 Entspricht dieser Zufallsversuch einer Bernoulli-Kette? /2
Begründen Sie Ihre Antwort.

5.7 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter den nächsten 100 kontrollierten Personen genau 5 Schmuggler sind. /3

5.8 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter den nächsten 100 kontrollierten Personen mindestens 4, aber höchstens 6 Schmuggler sind. /4

5.9 Berechnen Sie, wie viele Schmuggler bei 950 Ankömmlingen zu erwarten sind. /2

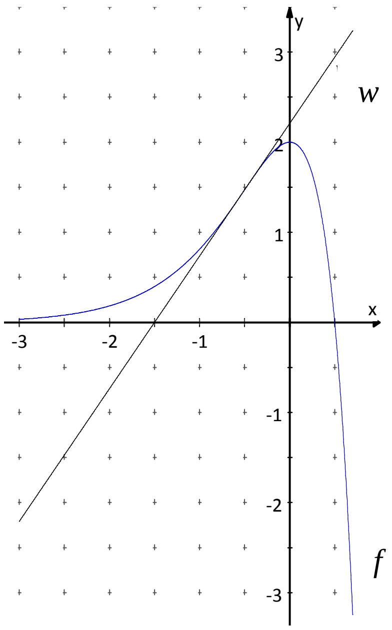
5.10 Berechnen Sie, wie viele Personen man mindestens kontrollieren muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Schmuggler erwischt hat. /4

Abschlussprüfung Berufsoberschule
2013 Mathematik
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	x_N ist NST von $f \Leftrightarrow f(x_N)=0$ $(2-4x)\cdot \mathrm{e}^{2x}=0$ Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist. $(2-4x)=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{N_1}=0{,}5}}$ $\mathrm{e}^{2x}\neq 0$ für alle $x\in \mathrm{ID}$	3		
1.2	$x\to-\infty:\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2-4x)\cdot \mathrm{e}^{2x}=0$ $x\to+\infty:\ \lim\limits_{x\to\infty}(2-4x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\to-\infty$		2	
1.3	x_E ist Extremstelle von f, wenn $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$ ist. $f'(x) = -4\mathrm{e}^{2x}+(2-4x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot 2$ $= \left(-4+2(2-4x)\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}$ $= -8x\cdot \mathrm{e}^{2x}$ $f''(x) = -8\mathrm{e}^{2x}+(-8x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot 2$ $= (-8-16x)\cdot \mathrm{e}^{2x}$ $-8x\cdot \mathrm{e}^{2x}=0 \Rightarrow \underline{x_E=0}$ $f''(0)=-8\cdot 1<0 \quad \Rightarrow$ HP bei $x_E=0$ $f(0)=2 \quad \Rightarrow \underline{HP(0\|2)}$	3	3	
1.4	x_W ist Wendestelle von f, wenn $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$ ist. $f''(x_W)=(-8-16x_W)\cdot \mathrm{e}^{2x_W}=0 \quad \Rightarrow \quad (-8-16x_W)=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_W=-0{,}5}$ $f(-0{,}5)=(2+2)\cdot \mathrm{e}^{-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}\approx 1{,}47 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{WP\left(-0{,}5\middle\|\frac{4}{\mathrm{e}}\right)}}$ Wendetangente: $w(x)=mx+n$ $m=f'(-0{,}5)=\frac{4}{\mathrm{e}}$ $\frac{4}{\mathrm{e}}=\frac{4}{\mathrm{e}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+n \quad \Rightarrow \quad n=\frac{6}{\mathrm{e}}$ $\underline{\underline{w(x)=\frac{4}{\mathrm{e}}x+\frac{6}{e}}}$	5	3	

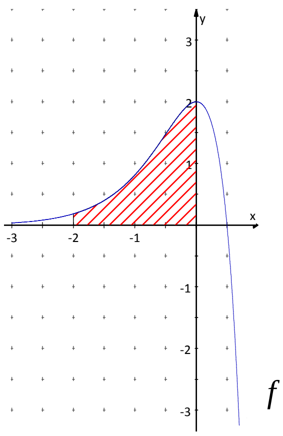
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$0{,}7$
$f(x)$	0,035	**0,08**	0,18	**0,4**	**0,8**	$-3{,}24$



</td><td>1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>

(1)



(2) Es muss gelten: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = -2e^{2x} + (2-2x)\cdot e^{2x}\cdot 2 = (-2+4-4x)\cdot e^{2x} = (2-4x)\cdot e^{2x}$

F mit $F(x) = (2-2x)\cdot e^{2x}$ ist eine Stammfunktion von f.

(3) Flächenberechnung:

$$A = \int_{-2}^{0}(2-4x)\cdot e^{2x}dx = \left[(2-2x)\cdot e^{2x}\right]_{-2}^{0}$$
$$= 2-(6e^{-4})$$
$$\approx \underline{\underline{1{,}89\ \text{FE}}}$$
</td><td>1</td><td>2
2</td><td></td></tr>
</table>

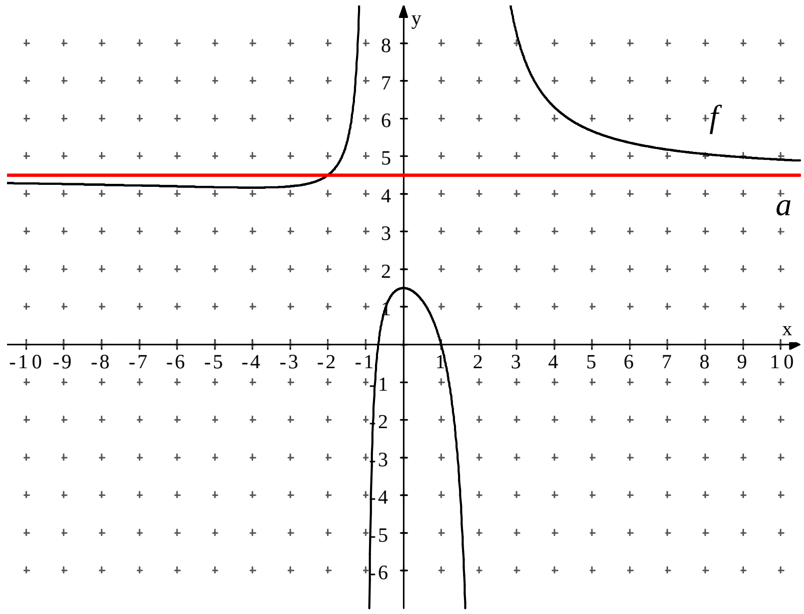
Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
1.7	Berechnung des Flächeninhalts der unendlichen Fläche durch Grenzwertbetrachtung: gesucht: $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t)$ $A(t) = \int_t^0 (2-4x) \cdot e^{2x} dx = \left[(2-2x) \cdot e^{2x}\right]_t^0$ $= 2-(2-2t)e^{2t}$ $\lim\limits_{t \to -\infty} (2-(2-2t)e^{2t}) = 2-0 = \underline{\underline{2}}$ Der Flächeninhalt der unendlichen Fläche ist endlich und hat den Wert 2 FE.			3
1.8	Gleichschenkliges Dreieck $\Rightarrow$ Die beiden Achsenabschnitte sind gleich groß. $\Rightarrow \quad \left\|x_{N_T}\right\| = n_T$ oder $\Rightarrow$ Anstieg jeder Tangente: $m_T = 1$ (beide Tangenten verlaufen parallel)			3
	Summe (Aufgabe 1)	13	15	6
	Mögliche BE		34	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	Nullstellen von $f: z(x) = 0$ und $n(x) \neq 0$ Nullstellen des Zählers: $z(x) = 0$ $9x^2 - 3x - 6 = 0 \quad \mid \cdot \frac{1}{9}$ $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \mid$ pq-Formel $x_{1/2} = \frac{1}{6} \mp \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{12}}$ $= \frac{1}{6} \mp \frac{5}{6}$ $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = 1$. $\Rightarrow$ Nullstellen der Funktion f sind $x_{N1} = -\frac{2}{3}$ und $x_{N2} = 1$	3		
2.2	Polstellen von $f: z(x) = 0$ und $n(x) \neq 0$ Nullstellen vom Nenner: $n(x)=0$ $2(x+1)(x-2) = 0 \quad \mid$ Regel vom Nullprodukt $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Durch Vergleich mit 2.1 folgt: Polstellen der Funktion f sind $x_{P1} = -1$ und $x_{P2} = 2$. Beide Polstellen sind einfache Nullstellen des Nenners und damit haben die Pole einen Vorzeichenwechsel.	4		
2.3	Mit $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ gilt für den Funktionsterm der Asymptotenfunktion a: $\frac{z(x)}{n(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$ mit $grad(r) < grad(n)$ Mit $2(x+1)(x-2) = 2x^2 - 2x - 4$ folgt (Polynomdivision): $(9x^2 - 3x - 6) : (2x^2 - 2x - 4) = \frac{9}{2} + \frac{6x+12}{2x^2-2x-4}$ $-(9x^2 - 9x - 18)$ $6x + 12$ Also gilt: $a(x) = \frac{9}{2}$.		5	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.4	(Wertetabelle und Graph siehe unten)	2	5	
2.5	Schnittstelle von f und a: $a(x) = f(x)$; $\frac{9}{2} = \frac{9x^2-3x-6}{2x^2-2x-4}$; $9(2x^2-2x-4) = 2(9x^2-3x-6)$; $-12x = 24$; $x = -2$; $\Rightarrow\ x_S = -2 \ \Rightarrow\ S(-2 \mid \frac{9}{2})$	4		

2.4

x	-10	-6	-3	-1,5	-0,5	0	0,5	3	5	10
$f(x)$	4,28	4,2	**4,2**	5,36	**0,9**	**1,5**	**1,17**	8,25	**5,67**	4,91



2.5 Schnittstelle von f und a:

$$a(x) = f(x)$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9x^2-3x-6}{2x^2-2x-4}$$

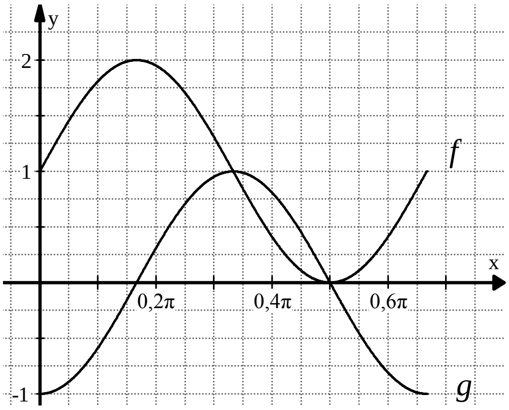
$$9(2x^2-2x-4) = 2(9x^2-3x-6)$$

$$-12x = 24$$

$$x = -2$$

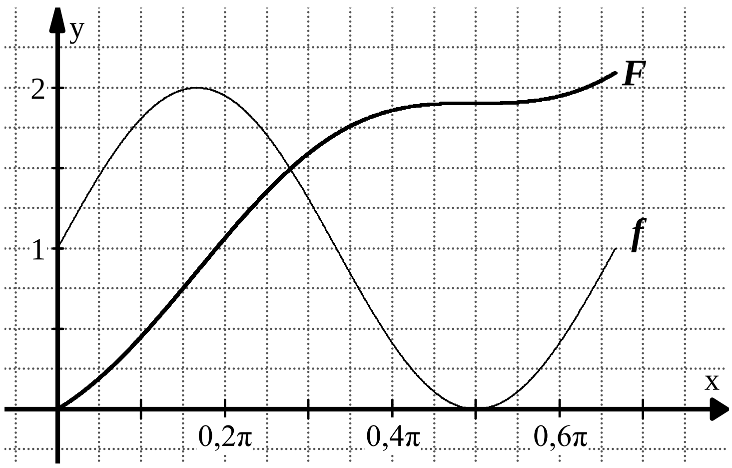
$$\Rightarrow \quad x_S = -2 \quad \Rightarrow \quad S(-2 \mid \tfrac{9}{2})$$

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
2.6	Notwendiges Kriterium für Extremstellen: $f'(x)=0$ $f'(x)=\frac{(18x-3)(2x^2-2x-4)-(9x^2-3x-6)(4x-2)}{(2x^2-2x-4)^2}$ $=\frac{36x^3-36x^2-72x-6x^2+6x+12-(36x^3-18x^2-12x^2+6x-24x+12)}{(2x^2-2x-4)^2}$ $=\frac{-12x^2-48x}{(2x^2-2x-4)^2}$ $=\frac{-12x(x+4)}{(2x^2-2x-4)^2}$ $0=\frac{-12x(x+4)}{(2x^2-2x-4)^2}$ $0=-12x(x+4)$ | Regel vom Nullprodukt $\Rightarrow x_1=0 \wedge x_2=-4$ Mit den Nullstellen des Zählers von f' folgt (unter Beachtung der Polstellen und ohne Prüfung mittels f''): $x_{E1}=0 \wedge x_{E2}=-4$ sind die Extremstellen von f.		5	
	Es gilt $y_{Min}=f(-4)$ und $y_{Max}=f(0)$ und damit: $y_{Min}=\frac{25}{6}$ und $y_{Max}=\frac{3}{2}$ $y_{Min}-y_{Max}=\frac{8}{3}$. Die Breite des Streifens beträgt rund $2,667$.			3
2.7	$W=\mathrm{IR}\setminus \left]\frac{3}{2};\frac{25}{6}\right[$			2
	Summe (Aufgabe 2)	13	15	5
	Mögliche BE		33	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Beschriftung


Mögliche Begründung:
Die Funktionswerte von f oszillieren um den Wert 1 und die Funktionswerte von g um den Wert 0.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$x_{S1} = \frac{1}{3}\pi$ und $x_{S2} = \frac{1}{2}\pi$ sind Schnittstellen von f und g,
denn es gilt:
$f(x) = 1 - \sin(3x - \pi)$ $g(x) = \cos(3x - \pi)$
$f(\frac{1}{3}\pi) = 1 - \sin(3 \cdot \frac{1}{3}\pi - \pi) = 1 - \sin(0) = 1$ $g(\frac{1}{3}\pi) = \cos(3 \cdot \frac{1}{3}\pi - \pi) = \cos(0) = 1$
$f(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \sin(3 \cdot \frac{1}{2}\pi - \pi) = 1 - \sin(\frac{1}{2}\pi) = 0$ $g(\frac{1}{2}\pi) = \cos(3 \cdot \frac{1}{2}\pi - \pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$
Die Massen m_1 und m_2 haben zum Zeitpunkt $\frac{1}{3}\pi$ s nach Beginn der Betrachtung eine Geschwindigkeit von $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zum Zeitpunkt $\frac{1}{2}\pi$ s nach Beginn der Betrachtung beträgt ihre Geschwindigkeit $0\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
(Es wird x in Sekunden und $f(x)$ bzw. $g(x)$ in Meter pro Sekunde gemessen.)</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

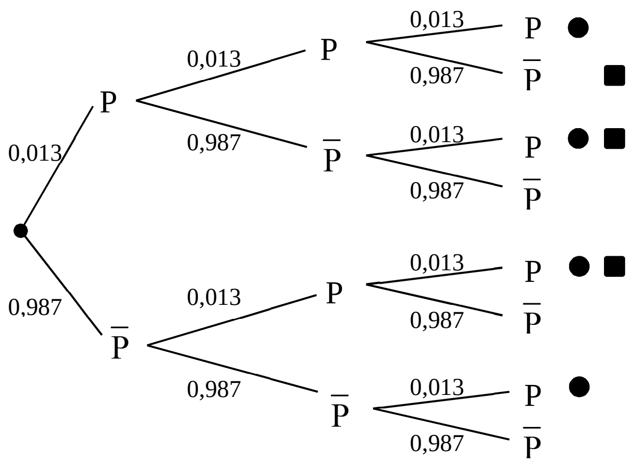
Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.3	Für das Maximum von f mit $f(x) = 1 - \sin(3x - \pi)$ gilt $f(x_H) = 2$, denn es gilt $-1 \leq \sin(3x - \pi) \leq 1$ für alle reellen Argumente. Für die Maximalstelle (Hochstelle) gilt: $\Rightarrow \quad 2 = 1 - \sin(3x - \pi) \quad \vert -1 \vert \cdot (-1)$ $\Rightarrow \quad \sin(3x - \pi) = -1 \,\vert\, \arcsin(\,)$ $\Rightarrow \quad 3x - \pi = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\xrightarrow{k=0;1} \quad x_{H_k} \in \{\ldots; \frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \ldots\} \quad \Rightarrow \quad x_H = \frac{1}{6}\pi$ als Hochstelle in ID $\Rightarrow \quad H(\frac{1}{6}\pi \mid 2)$ als Hochpunkt. Der Weg über die Ableitung ist ebenfalls möglich.		7	
3.4	Es gilt $F(0) = 0$ und $G(0) = 0$, da die Stammfunktionen den Ort der schwingenden Massen beschreiben. $F(x) = \int (1 - \sin(3x - \pi))\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } F(0) = 0$ $= x + \frac{1}{3}\cos(3x - \pi) + C \quad \text{mit } F(0) = 0$ $\Rightarrow 0 = 0 + \frac{1}{3}\cos(3 \cdot 0 - \pi) + C$ $\Rightarrow 0 = -\frac{1}{3} + C$ $F(x) = x + \frac{1}{3}\cos(3x - \pi) + \frac{1}{3}$ $G(x) = \int \cos(3x - \pi)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } G(0) = 0$ $= \frac{1}{3}\sin(3x - \pi) + C \quad \text{mit } G(0) = 0$ $\Rightarrow 0 = \frac{1}{3}\sin(3 \cdot 0 - \pi) + C$ $\Rightarrow 0 = 0 + C$ $G(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - \pi)$	3		2
3.5	$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = [F(x) - G(x)]_0^{\frac{1}{2}\pi}$ $= \left[(x + \frac{1}{3}\cos(3x - \pi) + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\sin(3x - \pi)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$ $= \left((\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3}\cos(3 \cdot \frac{1}{2}\pi - \pi) + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\sin(3 \cdot \frac{1}{2}\pi - \pi)\right) - \left((0 + \frac{1}{3}\cos(3 \cdot 0 - \pi) + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\sin(3 \cdot 0 - \pi)\right)$ $= \left((\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \cdot 1\right) - \left((0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \cdot 0\right)$ $= \frac{1}{2}\pi - 0$ $= \frac{1}{2}\pi$	5		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.6</td><td>

Mögliche Begründungen:
• doppelte Nullstelle bei f führt zu einer Sattelstelle bei F
• Extremstelle (Hochpunkt) von f führt zu einer Wendestelle bei F
• keine Nullstellen mit Vorzeichenwechsel für f, daher keine Extremstellen bei F
• Beginn im Ursprung, da zu $x = 0\,\text{s}$ laut Aufgabe $h = 0\,\text{m}$ gehört</td><td></td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe (Aufgabe 3)</td><td>13</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	$g: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{CD}$; $r \in \mathrm{IR}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\11\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0-7\\11-11\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-7\\0\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathrm{IR}$ Länge der Dachrinne: $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-7\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{49} = 7$ (in m)	3		
4.2	Eine Parameterform: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$; $r,t \in \mathrm{IR}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}$; $r,t \in \mathrm{IR}$ Bestimmung eines möglichen Normalenvektors $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\14\\56\end{pmatrix}$ und d mit $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\14\\56\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} = 322$ Koordinatendarstellung: $E: y + 4z = 23$	2	4	
4.3	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\7\\4\end{pmatrix}$; $M(3{,}5 \vert 7 \vert 4)$		2	
4.4	$A_{gesamt} = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}\right\rvert = 7 \cdot \sqrt{68} \approx 57{,}72$ (in m^2) $A_{Solar} = A_{gesamt} - A_{Fenster} = 57{,}72 - 2 = 55{,}72$ (in m^2) (alternativ über Kreuzprodukt $A_{Solar} = \lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\rvert - 2$)	3		
4.5	Der Neigungswinkel entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB}$.			

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
	$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-8\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-8\\2\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{8}{\sqrt{68}} \approx 0{,}97 \Rightarrow \alpha \approx 14^\circ$	5		
4.6	Durch Einsetzen der x und y-Komponenten des Ortsvektors zum Punkt A in die Ebenengleichung V erhält man die z-Komponente. $0 = 3s$ $3 = 3r$ $z = 3 + r$ $\Rightarrow s = 0\,;\, r = 1\,;\, z = 4$ Somit hat die hintere rechte Ecke des Vordaches die Koordinaten $S(0 \mid 3 \mid 4)$. Die Höhe des senkrechten Dachabschnitts beträgt somit $h = 1\,\text{m}$.		4	
4.7	Die Sonnenstrahlen stehen senkrecht auf der Ebene E. Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ liefert einen Vektor senkrecht zur Ebene E (siehe Aufgabe 4.2). Ein Richtungsvektor der Sonnenstrahlen entspricht hier dem Gegenvektor. $(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$		2	
4.8	$E: y + 4z = 23$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{17}$ Daraus folgt der Abstand zum Koordinatenursprung: $d = \frac{23}{\sqrt{17}} \approx 5{,}6\ (\text{in m})$.		3	
4.9	In den Koordinatengleichungen für y und z der Parameterform von V wird mit Hilfe der Koordinatenform von E der Parameter r bestimmt: $r = \frac{11}{7}$. Aus der Parameterform von V wird die Parameterform für die Gerade. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\\frac{33}{7}\\\frac{32}{7}\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\quad s \in \mathrm{IR}$		2	3
	Summe (Aufgabe 4)	13	17	3
	Mögliche BE	33		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5.1</td><td>E: Eine zufällig kontrollierte Person hat Parfüm bei sich.
$P(\mathrm{E})=\frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}=\frac{180}{13846}\approx\underline{\underline{0,013}}=\underline{\underline{1,3\%}}$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>

E$_1$: Die dritte kontrollierte Person führt Parfüm bei sich. ●
E$_2$: Von drei kontrollierten Personen haben genau zwei Personen Parfüm im Gepäck. ■
$P(\mathrm{E}_1)\approx 0,013^3+2\cdot 0,013^2\cdot 0,987+0,013\cdot 0,987^2\approx\underline{\underline{0,013}}$
$P(\mathrm{E}_2)\approx 3\cdot 0,013^2\cdot 0,987\approx\underline{\underline{0,0005}}$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>$\overline{\mathrm{E}}$: Unter den ersten drei kontrollierten Personen ist keine (einzige), die Parfüm im Gepäck hat.
$P(\overline{\mathrm{E}})\approx 0,987^3\approx 0,9615$
$P(\mathrm{E})=1-P(\overline{\mathrm{E}})\quad\Rightarrow\ P(\mathrm{E})\approx 1-0,987^3\approx\underline{\underline{0,0385}}$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.4</td><td>S: Schmuggler
M: Mann
<table><tr><th></th><th>S</th><th>$\overline{\mathrm{S}}$</th><th>$\sum$</th></tr><tr><td>M</td><td>*22*</td><td>541</td><td>*563*</td></tr><tr><td>$\overline{\mathrm{M}}$</td><td>*17*</td><td>356</td><td>373</td></tr><tr><td>$\sum$</td><td>39</td><td>897</td><td>*936*</td></tr></table>$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{S})=\frac{39}{936}=\frac{1}{24}\approx\underline{\underline{0,0417}}$,
$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{M})=\frac{563}{936}\approx\underline{\underline{0,6015}}$,
$P(\mathrm{C})=P(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{S})=\frac{17}{936}\approx\underline{\underline{0,0182}}$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
5.5	A und B sind stochastisch unabhängig, wenn $P_A(B) = P(B)$ gilt. $P_S(M) = \frac{22}{39} \approx 0{,}5641$ und $P(M) \approx 0{,}6015$ (siehe 5.4) Da die beiden Wahrscheinlichkeiten nicht gleich sind, folgt die Tatsache, dass der Versuch, Parfüm auf die Insel zu bringen, stochastisch vom Geschlecht abhängig ist.		3	
5.6	Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette, weil: § die Trefferwahrscheinlichkeit immer die gleiche ist und § der Versuch nur zwei mögliche Ausgänge hat.	2		
5.7	$P(X=k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $n=100$ $p=0{,}013$ $P(X=5) = B(100;\ 0{,}013;\ 5) = \binom{100}{5} \cdot 0{,}013^5 \cdot 0{,}987^{95} \approx \underline{\underline{0{,}0081}}$		3	
5.8	$P(4 \le X \le 6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$ $P(X=4) = \binom{100}{4} \cdot 0{,}013^4 \cdot 0{,}987^{96} \approx 0{,}0319$ $P(X=5) = \binom{100}{5} \cdot 0{,}013^5 \cdot 0{,}987^{95} \approx 0{,}0081$ $P(X=6) = \binom{100}{6} \cdot 0{,}013^6 \cdot 0{,}987^{94} \approx 0{,}0017$ $0{,}0417$		4	
5.9	$E = n \cdot p = 950 \cdot 0{,}013 = \underline{\underline{12{,}35}}$ Es sind unter den nächsten 950 Ankömmlingen 12 bis 13 Schmuggler zu erwarten.	2		
5.10	A: Es wurde mindestens ein Schmuggler erwischt. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \ge 0{,}99 \Rightarrow P(\overline{A}) \le 0{,}01$ $P(\overline{A}) = B(n;\ 0{,}013;\ 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}013^0 \cdot 0{,}987^{n-0} = 0{,}987^n \le 0{,}01$ $\Rightarrow n \ge \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}987} \approx \underline{\underline{351{,}9}}$ Man muss mindestens 352 Personen kontrollieren, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens einen Schmuggler erwischt hat.			4
	Summe (Aufgabe 5)	13	16	4
	Mögliche BE	33		