LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2022/2023

Mathematik C

05. Mai 2023 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f und g mit ihren Funktionsgleichungen

$f(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 27x^2$ und $g(x) = -x^2(x+3)(x-3)^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f heißt G_f.

a) Weisen Sie nach, dass …

I die Nullstellen der Funktion g auch Nullstellen der Funktion f sind,

II beide Funktionen den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben,

III beide Funktionen nicht identisch sind.

b) Notieren Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f.
Entscheiden und begründen Sie rechnerisch, ob G_f an der Stelle $x_1 = 1$ oder an der Stelle $x_2 = 2$ den größeren Anstieg besitzt.

c) Mit $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = 3$ sind zwei Extremstellen von f gegeben.
Berechnen Sie die beiden weiteren Extremstellen.
Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art aller vier Extrempunkte von G_f.

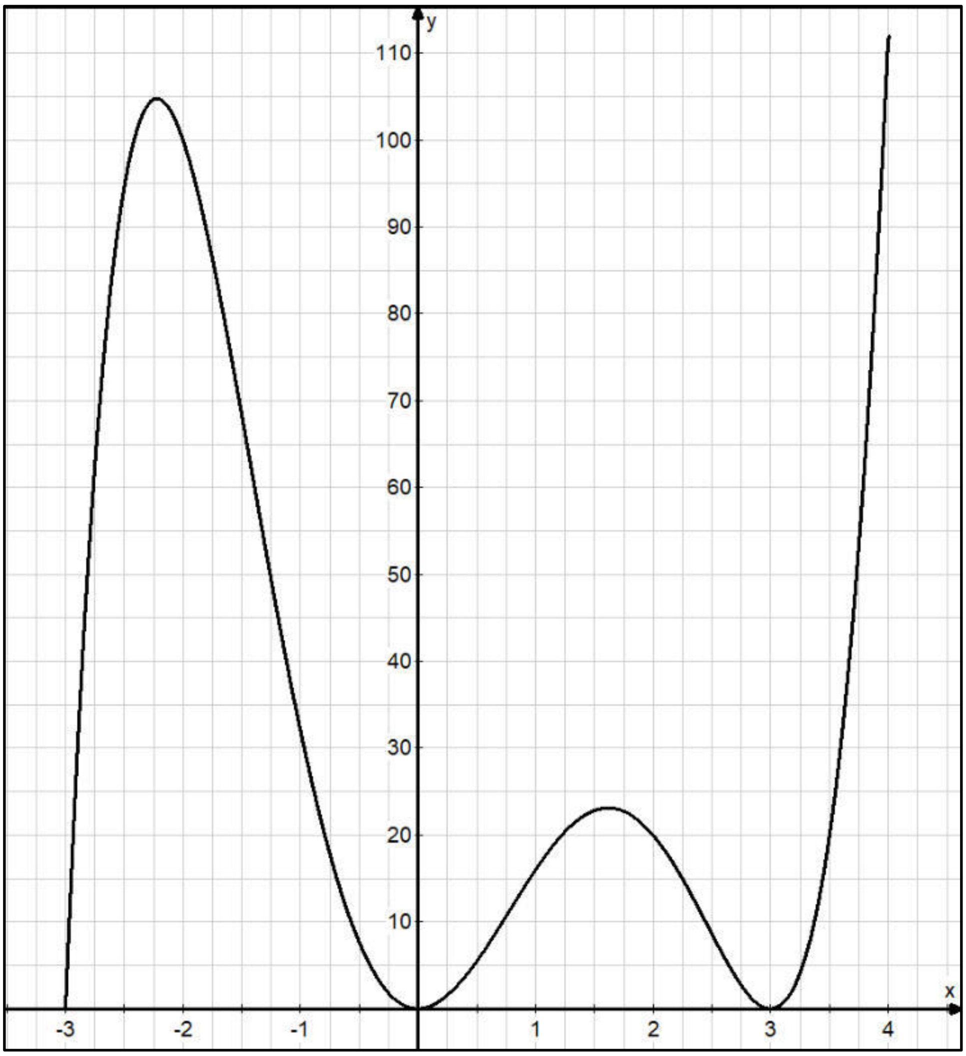
d) Prüfen Sie, ob der Punkt P(2 | 20) zu G_f gehört und ob es sich um einen Wendepunkt handelt.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Wählen Sie eine geeignete Achseneinteilung insbesondere für die y-Achse.

f) G_f schließt im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ gemeinsam mit der x-Achse zwei Teilflächen vollständig ein. Berechnen Sie die Maßzahl ihres Gesamtflächeninhalts.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	6	5	9	2	3	5	30

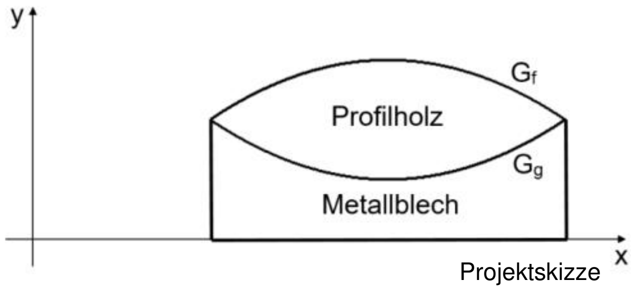
Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	I: Nullstellen von g durch Ablesen oder Wertetabelle: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$	2
	Einsetzen in f: $f(-3) = f(0) = f(3) = 0$	1
	II: Da $x_2 = 0$ eine Nullstelle von beiden Funktionen ist, verlaufen beide Graphen durch den Ursprung ($f(0) = 0 = g(0)$).	1
	III: Nachweis der Ungleichheit z.B. durch Punktprobe $f(1) \neq g(1)$ oder Termumformung oder Verhalten im Unendlichen/ Grenzwerte	2
1b)	$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 27x^2 + 54x$ $f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 54x + 54$ $f'''(x) = 60x^2 - 72x - 54$	3
	$f'(1) = 20$; $f'(2) = -16$ Der Anstieg an der Stelle $x_1 = 1$ ist größer.	2
1c)	$f'(x) = 0 = x(5x^3 - 12x^2 - 27x + 54)$	1
	$(5x^3 - 12x^2 - 27x + 54) : (x - 3) = 5x^2 + 3x - 18$	2
	$0 = 5x^2 + 3x - 18$; $x_{E3} \approx -2{,}22$; $x_{E4} \approx 1{,}62$	2
	$f''(-2{,}22) \approx -222{,}36 < 0$; $f(-2{,}22) \approx 104{,}75$; $H_1(-2{,}22 \mid 104{,}75)$ $f''(0) = 54 > 0$; $f(0) = 0$; $T_1(0 \mid 0)$ $f''(1{,}62) \approx -42{,}93 < 0$; $f(1{,}62) \approx 23{,}09$; $H_2(1{,}62 \mid 23{,}09)$ $f''(3) \approx 108 > 0$; $f(3) = 0$; $T_2(3 \mid 0)$	4
1d)	$f(2) = 20$; also gehört P zu G_f	1
	$f''(2) = -38 \neq 0$; P ist kein Wendepunkt	1

1e)		3
1f)	$A_1 = \int_{-3}^{0} f(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + 9x^3\right]_{-3}^{0} = 0 - (-157{,}95) = 157{,}95$ FE $A_2 = \int_{0}^{3} f(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + 9x^3\right]_{0}^{3} = 36{,}45 - 0 = 36{,}45$ FE $A_{ges} = A_1 + A_2 = 194{,}4$ FE (Alternativ kann auch gleich in den Grenzen von –3 bis 3 integriert werden.)	3 1 1
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Herr Meier hat in einem Örtchen Brandenburgs ein Hoftor entdeckt, welches er nachbauen möchte.
Dazu hat er sich eine Skizze angefertigt.
Die Parabelbögen und die Rahmenteile werden aus Metallprofilen gefertigt, deren Dicke hier vernachlässigt werden kann.
Ebenso bleibt die Trennung der beiden Torhälften unberücksichtigt.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter am Tor.

Bildquelle: privat



Projektskizze

Für den oberen Parabelbogen G_f hat Herr Meier den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}15x^2 + 1{,}2x - 0{,}6$ zugrunde gelegt.

a) Geben Sie die Höhe des geplanten Tores an. Berechnen Sie dazu die Koordinaten des Hochpunktes von G_f .

b) Für den unteren Parabelbogen G_g werden die Punkte P(0 | 3), Q(4 | 0,6) und R(8 | 3) von Herrn Meier festgelegt.
Ermitteln Sie aus diesen Punkten eine Gleichung für die quadratische Funktion g.

(zur Kontrolle: $g(x) = 0{,}15x^2 - 1{,}2x + 3$)

c) Berechnen Sie die beiden Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g.
Den unteren Teil des Tores möchte Herr Meier im Gegensatz zum Original vollständig mit einem Metallblech füllen. Dieses soll aus einer rechteckigen Metallplatte geschnitten werden. Ein Quadratmeter Metallblech kostet 85 €.
Geben Sie die Mindestmaße der benötigten Metallplatte und ihren Preis an.

d) Der obere Teil des Tores zwischen den Parabelbögen soll vollständig mit Holzprofilen ausgekleidet werden. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt in Quadratmetern.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	7	6	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$f'(x) = -0{,}3x + 1{,}2$ $f'(x) = 0$; $x = 4$ $f(4) = 1{,}8$ H(4 | 1,8) Die Höhe des geplanten Tores beträgt 1,8 m. Hinweise: Aufgrund der Abbildung ist ein Prüfen der hinreichenden Bedingung nicht notwendig. Es kann auch mit der Scheitelpunktsformel gearbeitet werden.	3
2b)	$g(x) = ax^2 + bx + c$	1
	P(0 | 3): $3 = 0a + 0b + c$ Q(4 | 0,6): $0{,}6 = 16a + 4b + c$ R(8 | 3): $3 = 64a + 8b + c$	3
	Lösung des LGS: $a = 0{,}15$; $b = -1{,}2$; $c = 3$ $g(x) = 0{,}15x^2 - 1{,}2x + 3$	3
2c)	$f(x) = g(x)$ $-0{,}15x^2 + 1{,}2x - 0{,}6 = 0{,}15x^2 - 1{,}2x + 3$	1
	$0 = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 3{,}6$ $x_1 = 2$; $x_2 = 6$	2
	$f(2) = f(6) = 1{,}2$; $S_1(2 \mid 1{,}2)$; $S_2(6 \mid 1{,}2)$	1
	$A = 4\text{ m} \cdot 1{,}2\text{ m} = 4{,}8\text{ m}^2$; $4{,}8\text{ m}^2 \cdot 85\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}^2} = 408$ € Die rechteckige Platte muss mindestens 4 m breit und 1,2 m hoch sein und kostet 408 €.	2
2d)	$h(x) = g(x) - f(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 3{,}6$	1
	$A = \left\lvert \int_2^6 h(x)dx \right\rvert = \left\lvert \left[0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 3{,}6x\right]_2^6 \right\rvert = \lvert 0 - 3{,}2 \rvert = 3{,}2$ FE Die Fläche aus Profilholz beträgt 3,2 m².	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Zu den Kugeln beim Poolbillard gehören der weiße Spielball und
15 durchnummerierte Objektbälle.
Die Bälle 1 bis 8 sind vollständig gefärbt und heißen „die Vollen“,
zu denen auch die schwarze Kugel gehört.
„Die Halben“ mit den Nummern 9 bis 15 tragen nur einen farbigen Ring.
Alle Kugeln sind gleich groß und gleich schwer.

a) Ein neuer Satz Kugeln wird benötigt. Der Preisvergleich im Internet ergab folgende Ergebnisse: 59,90 €; 39,60 €; 49,95 €; 44,95 €.
Geben Sie den Median an und berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert der Preise.
Bestimmen Sie rechnerisch die Standardabweichung der vier Angebote.

Ein Anbieter verkauft die Kugeln auch einzeln für je 2,99 €. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der Einzelkauf von 16 Kugeln teurer wäre als der Kauf des günstigsten Sets aus dem Preisvergleich.

b) Im Zufallsexperiment I wird aus einem Karton mit den 16 unsortierten Poolbillard-Kugeln eine Kugel mit verschlossenen Augen entnommen.
Geben Sie die Ergebnismenge Ω an und begründen Sie, dass es sich hierbei um ein Laplace-Experiment handelt.

Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten, „eine Halbe“ oder eine Kugel mit einer Primzahl zu ziehen.

c) Im Zufallsexperiment II werden aus dem Karton nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen mit verschlossenen Augen entnommen und jeweils notiert, ob es sich um „eine **H**albe“, „eine **V**olle“ oder die **w**eiße Kugel handelt.

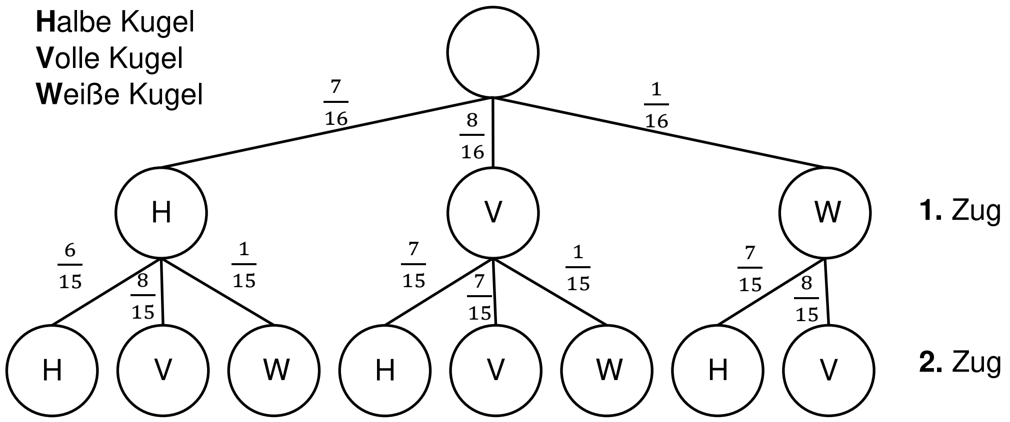
Zeichnen Sie zu diesem Experiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1 und E_2.

E_1: Nur „Halbe“ werden gezogen.

E_2: Die weiße Kugel befindet sich unter den Gezogenen.

d) Klaus muss für einen Trick vier Kugeln von den sieben „Halben“ auswählen.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für seine Auswahl.
Jede der vier Kugeln muss einmal gestoßen werden. Ermitteln Sie die Anzahl aller möglichen Varianten für die Reihenfolge.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	6	4	7	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	Median: 39,60 ; <u>44,95 ; 49,95</u> ; 59,90 ; $z = \frac{44{,}95 + 49{,}95}{2} = 47{,}45$ €	1
	arithmetischer Mittelwert: $\overline{x} = \frac{39{,}60 + 44{,}95 + 49{,}95 + 59{,}90}{4} = 48{,}60$ €	1
	$s^2 = \frac{(39{,}60 - 48{,}60)^2 + \ldots + (59{,}90 - 48{,}60)^2}{4} \approx 55{,}96$ Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2} \approx 7{,}48$ €	2
	(Bei Nutzung der n-1-Formel ergeben sich $s^2 \approx 74{,}61$ und $s \approx 8{,}64$ €.)	
	$2{,}99 \cdot 16 = 47{,}84$; $\frac{47{,}84}{39{,}60} \cdot 100\,\% \approx 120{,}81\,\%$; Der Einzelkauf wäre 20,81 % teurer.	2
3b)	$\Omega = \{W; 1; 2; 3; \ldots ; 15\}$	1
	Da alle Kugeln gleich groß und gleich schwer sind, ist beim Ziehen mit verschlossenen Augen die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis gleich. Deshalb handelt es sich um ein Laplace-Experiment.	1
	$P(\text{Halbe}) = \frac{7}{16} = 43{,}75\,\%$; $P(\text{Primzahl}) = \frac{6}{16} = 37{,}5\,\%$ Die Wahrscheinlichkeit, eine Halbe zu ziehen, ist größer.	2
3c)	**H**albe Kugel **V**olle Kugel **W**eiße Kugel 	4
	$P(E_1) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{7}{40} = 17{,}5\,\%$	1
	$P(E_2) = \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{15} + \frac{8}{16} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$	2
3d)	$C_7^4 = \binom{7}{4} = 35$; Es gibt 35 Möglichkeiten für die Auswahl von vier „Halben“.	2
	$P_4 = 4! = 24$; Es gibt 24 Möglichkeiten für die Reihenfolge der vier Kugeln.	1
	Summe	20