



LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

**Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2021/2022**

Mathematik C

06. Mai 2022 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -0,25x^4 + 1,75x^2 + 2,5$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion heißt G_f .

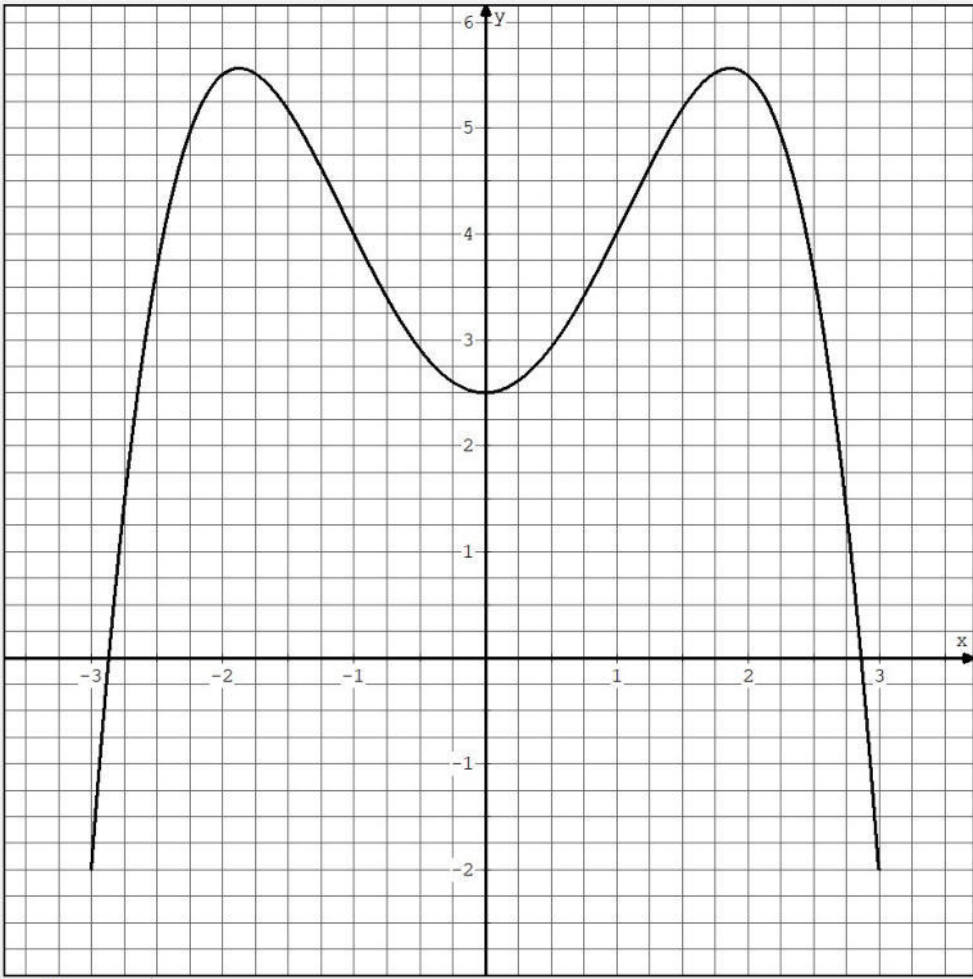
- a) Treffen Sie eine begründete Aussage zum Symmetrieverhalten von G_f bezüglich der y -Achse beziehungsweise bezüglich des Koordinatenursprungs.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an.
- b) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.
- c) Berechnen Sie die Koordinaten und die Art aller Extrempunkte von G_f .
- d) Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte von G_f .
(zur Kontrolle: $W_{1/2}(\pm 1,08 \mid 4,20)$)

Notieren Sie das Intervall für x , in dem G_f linksgekrümmt (konvex) verläuft.

- e) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion t mit $t(x) = 2,52x + 1,48$ im Rahmen der Genauigkeit von zwei Nachkommastellen eine Wendetangente an G_f darstellt.
Geben Sie die Gleichung der zweiten Wendetangente an.
- f) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	5	8	7	3	3	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten vorhanden sind, bzw. weil gilt $f(x) = f(-x)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	2 2
1b)	$S_y(0 2,5)$ $f(x) = 0$ $0 = -0,25x^4 + 1,75x^2 + 2,5$: (-0,25) und Subst. $x^2 = z$ $0 = z^2 - 7z - 10$ $z_1 \approx -1,22$ $z_2 \approx 8,22$; $x_{1/2} \approx \pm 2,87$ $S_{x_1}(-2,87 0)$; $S_{x_2}(2,87 0)$	1 3 1
1c)	$f'(x) = -x^3 + 3,5x$; $f''(x) = -3x^2 + 3,5$ $f'(x) = 0$ $0 = x \cdot (-x^2 + 3,5)$; $x_1 = 0$ $0 = -x^2 + 3,5$; $x_{2/3} \approx \pm 1,87$ $f''(-1,87) \approx -6,99 < 0$; $f(-1,87) \approx 5,56$; $H_1(-1,87 5,56)$ $f''(0) = 3,5 > 0$; $f(0) = 2,5$; $T(0 2,5)$ $f''(1,87) \approx -6,99 < 0$; $f(1,87) \approx 5,56$; $H_2(1,87 5,56)$	2 3 3
1d)	$f'''(x) = -6x$ $f''(x) = -3x^2 + 3,5 = 0$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{7}{6}} \approx \pm 1,08$ $f'''(-1,08) = 6,48 \neq 0$; $f(-1,08) \approx 4,20$; $W_1(-1,08 4,20)$ $f'''(1,08) = -6,48 \neq 0$; $f(1,08) \approx 4,20$; $W_2(1,08 4,20)$ Intervall mit Linkskrümmung: $-1,08 < x < 1,08$	1 2 3 1

<p>1e)</p>	<p>$t(1,08) \approx 4,20$; also verläuft t durch den Wendepunkt W_2 $f'(1,08) \approx 2,52$; also hat f in W_2 den gleichen Anstieg wie t Daraus folgt, dass t eine Wendetangente an G_f ist.</p> <p>Zweite Tangente durch Ausnutzung der Symmetrie von G_f oder durch Aufstellen der Geradengleichung mit W_1: $t_2: y = -2,52x + 1,48$</p>	<p>2</p> <p>1</p>
<p>1f)</p>		<p>3</p>
<p style="text-align: right;">Summe</p>		<p>30</p>

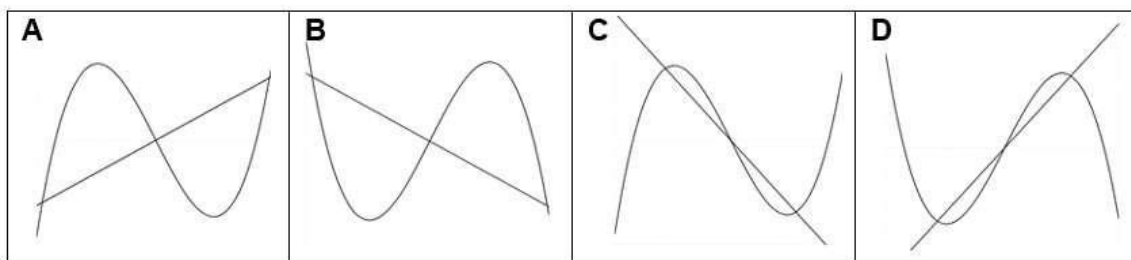
2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion heißt G_f .

Außerdem ist von einer linearen Funktion g bekannt, dass ihr Graph G_g durch die Punkte $P(0 | 20)$ und $Q(4 | 0)$ verläuft.

- a) Nur eine der vier folgenden Abbildungen zeigt eine mögliche Skizze der Graphen G_f und G_g in einem üblichen kartesischen Koordinatensystem mit waagerechter x -Achse. Treffen Sie eine begründete Entscheidung, welche das ist.



- b) Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die Funktion g .

(zur Kontrolle: $g(x) = -5x + 20$)

Geben Sie den Anstieg für eine beliebige Funktion h an, deren Graph senkrecht zum Graphen von g verläuft.

- c) Die Funktion f hat 3 ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an. Ermitteln Sie rechnerisch die Maßzahl des Inhalts derjenigen Fläche, die von G_f und der x -Achse im Intervall $[4 ; 7]$ eingeschlossen wird.
- d) Q ist ein gemeinsamer Punkt von G_f und G_g . Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der beiden weiteren Schnittpunkte beider Graphen.
(zur Kontrolle: $S_1(2 | 10)$ und $S_2(6 | -10)$)
- e) Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der zwischen G_f und G_g im Intervall $[2 ; 4]$ eingeschlossenen Fläche.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	4	5	6	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	Abbildung C trifft zu, da beispielsweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ und negativer Anstieg von G_g (aus P und Q)	2
2b)	$y = mx + n$ mit $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -5$ und $n = 20$ (wegen P) g: $y = -5x + 20$ $m_h = -\frac{1}{m} = 0,2$	3 1
2c)	Nullstellen z.B. mit Wertetabelle: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 7$ $A = \left \int_4^7 f(x) dx \right = \left \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{39}{2}x^2 - 28x \right]_4^7 \right = -12,25 - 8 = 20,25$ FE Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 20,25 Flächeneinheiten.	2 3
2d)	$f(x) = g(x)$ $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = -5x + 20$ $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ $(x^3 - 12x^2 + 44x - 48) : (x - 4) = x^2 - 8x + 12$ $x^2 - 8x + 12 = 0$ $x_1 = 2$; $x_2 = 6$ $f(2) = g(2) = 10$ und $f(6) = g(6) = -10$ Die beiden weiteren Schnittpunkte sind $S_1(2 10)$ und $S_2(6 -10)$.	1 4 1
2e)	$A = \int_2^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_2^4 (x^3 - 12x^2 + 44x - 48) dx$ $= \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 48x \right]_2^4 = -32 - (-36) = 4$ FE Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 4 Flächeneinheiten.	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Für ein Marketingprojekt wurden vor einem Supermarkt 60 Personen nach dem Rechnungsbetrag ihres Einkaufs befragt. Fünf von ihnen wurden um ihre Adresse gebeten, damit ihnen als Dank für ihre Teilnahme an der Befragung ein kleines Geschenk zugesendet werden kann.

- a) Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gab, aus allen Befragten fünf Personen auszuwählen, die ein Geschenk erhalten sollen.
Ermitteln Sie auch die Anzahl der Möglichkeiten, die fünf verschiedenen Geschenke an die fünf ausgewählten Personen zu vergeben.
- b) Die zu beschenkenden Personen haben folgende Rechnungsbeträge angegeben:
23,75 € ; 10,50 € ; 107,28 € ; 2,05 € ; 46,42 €.
Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung dieser Angaben.
- c) Unter den zu beschenkenden Personen sind drei Frauen und zwei Männer, deren Adresse auf je einem von fünf Zetteln steht. Zufällig wird nacheinander für jedes Geschenk ein Adresszettel gezogen.
Stellen Sie dieses Losverfahren für die Vergabe der ersten drei Geschenke an Frauen oder Männer in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass schon unter den ersten drei Gewinnern die beiden Männer sind.
- d) In der folgenden Tabelle sind die Angaben **aller Befragten** zusammengefasst:

Klasse	1	2	3	4
Rechnungsbetrag in €	$0 < x \leq 25$	$25 < x \leq 50$	$50 < x \leq 100$	$100 < x \leq 200$
Anzahl unter den Befragten	22	12	18	8

- Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert der Rechnungsbeträge bezüglich dieser Klasseneinteilung.
- Geben Sie pro Klasse die relative Häufigkeit an und stellen Sie diese Angaben in einem geeigneten Diagramm graphisch dar.
- Stellen Sie eine begründete Vermutung über die Änderung der absoluten und relativen Häufigkeiten auf, wenn bei gleichem Einkaufsverhalten 180 Personen befragt würden.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	3	5	8	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	$C_{60}^5 = \binom{60}{5} = 5.461.512$ <p>Es gibt 5.461.512 Möglichkeiten für die Auswahl der Beschenkten.</p> $P_5 = 5! = 120$ <p>Es gibt 120 Möglichkeiten, die Geschenke zu verteilen.</p>	<p>2</p> <p>2</p>
3b)	$\bar{x} = \frac{23,75 + 10,5 + 107,28 + 2,05 + 46,42}{5} = \frac{190}{5} = 38$ $s^2 = \frac{(23,75 - 38)^2 + \dots + (46,42 - 38)^2}{5} \approx \frac{7122,33}{5} \approx 1424,47 ; s \approx 37,74$ <p>oder</p> $s^2 = \frac{(23,75 - 38)^2 + \dots + (46,42 - 38)^2}{5 - 1} = \frac{7122,33}{5 - 1} \approx 1780,58 ; s \approx 42,20$ <p>Der arithmetische Mittelwert der Einkäufe beträgt 38 € und die Standardabweichung 37,74 € bzw. 42,20 €.</p>	<p>1</p> <p>2</p>
3c)	<p> $p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{10} = 30\%$ </p>	<p>3</p> <p>2</p>

3d)	$\bar{x} = \frac{22 \cdot 12,5 + 12 \cdot 37,5 + 18 \cdot 75 + 8 \cdot 150}{60} = \frac{3275}{60} \approx 54,58$ <p>Der arithmetische Mittelwert beträgt 54,58 €.</p> $h_1 = \frac{11}{30} \approx 36,67 \% ; h_2 = \frac{1}{5} = 20 \% ; h_3 = \frac{3}{10} = 30 \% ; h_4 = \frac{2}{15} \approx 13,33 \%$ <div data-bbox="274 459 938 801" style="text-align: center;"> <table border="1" style="margin: auto;"> <caption>Relative Frequencies</caption> <thead> <tr> <th>Klasse Nummer</th> <th>relative Häufigkeit</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>36,67%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>20%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>30%</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>13,33%</td> </tr> </tbody> </table> </div> <p>Wenn die Anzahl der befragten Personen verdreifacht wird, müssen sich bei gleichem Kaufverhalten auch die absoluten Häufigkeiten jeweils verdreifachen, um die Summe von 180 zu erreichen. Das gleichbleibende Kaufverhalten spiegelt sich in unveränderten relativen Häufigkeiten wider, da sich h_i und auch n (Zähler und Nenner) verdreifachen.</p>	Klasse Nummer	relative Häufigkeit	1	36,67%	2	20%	3	30%	4	13,33%	2 2 2
Klasse Nummer	relative Häufigkeit											
1	36,67%											
2	20%											
3	30%											
4	13,33%											
	Summe	20										

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2021/22 im Fach Mathematik

Name der Gutachter*in: _____

 Erstgutachten Zweitgutachten

Name des Prüflings: _____

Klasse: _____

Schule: _____

Datum der Prüfung: 06.05.2022

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Symmetriangabe mit Begründung Angabe der Grenzwerte	2 2		
1b)	Angabe des Schnittpunktes mit der y-Achse Berechnen der Nullstellen von f Angabe der Schnittpunkte mit der x-Achse	1 3 1		
1c)	Notieren der ersten und zweiten Ableitung Berechnen der Nullstellen der ersten Ableitung Nachweis der Art der EP, Koordinatenangabe	2 3 3		
1d)	Notieren der dritten Ableitung Bestimmen der Nullstellen der zweiten Ableitung Nachweis der Wendepunkte, Koordinatenangabe Angabe des Intervalls mit Linkskrümmung	1 2 3 1		
1e)	Nachweis der gegebenen Wendetangente Angaben der zweiten Wendetangente	2 1		
1f)	Zeichnen des Graphen	3		
Summe Aufgabe 1:		30		
2a)	Angeben der Abbildung mit Begründung	2		
2b)	Ermitteln der Geradenfunktionsgleichung Angabe des Normalenanstiegs	3 1		
2c)	Angeben der Nullstellen Berechnung des Flächeninhalts	2 3		
2d)	Ermitteln der Differenzfunktion und Berechnen ihrer Nullstellen Angabe der vollst. Koordinaten der Schnittpunkte	1 4 1		
2e)	Berechnen des eingeschlossenen Flächeninhalts	3		
Summe Aufgabe 2:		20		
3a)	Bestimmung der Auswahlmöglichkeiten Bestimmung der Anordnungsmöglichkeiten	2 2		
3b)	Berechnen des arithmetischen Mittelwerts Berechnen der Standardabweichung	1 2		
3c)	Zeichnen und Beschriften des Baumdiagramms Berechnen einer Wahrscheinlichkeit	3 2		
3e)	Berechnen des Mittelwerts der Klasseneinteilung Angabe der relativen Häufigkeiten Darstellung der rel. H. im Diagramm Formulierung einer begründeten Vermutung	2 2 2 2		
Summe Aufgabe 3:		20		
Gesamtpunktzahl:		70		

Bewertungsvorschlag: _____

Datum und Unterschrift der Gutachter*in