LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2020/2021

Mathematik B

07. Mai 2021 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0{,}2x^4 - 4{,}45x^2 + 20;\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Begründen Sie, dass G_f symmetrisch zur y-Achse verläuft und geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f mit den beiden Koordinatenachsen.

c) Weisen Sie nach, dass $x = 0$ eine Extremstelle der Funktion f ist und berechnen Sie alle weiteren Extremstellen von f.
Ermitteln Sie die vollständigen Koordinaten der Tiefpunkte von G_f.

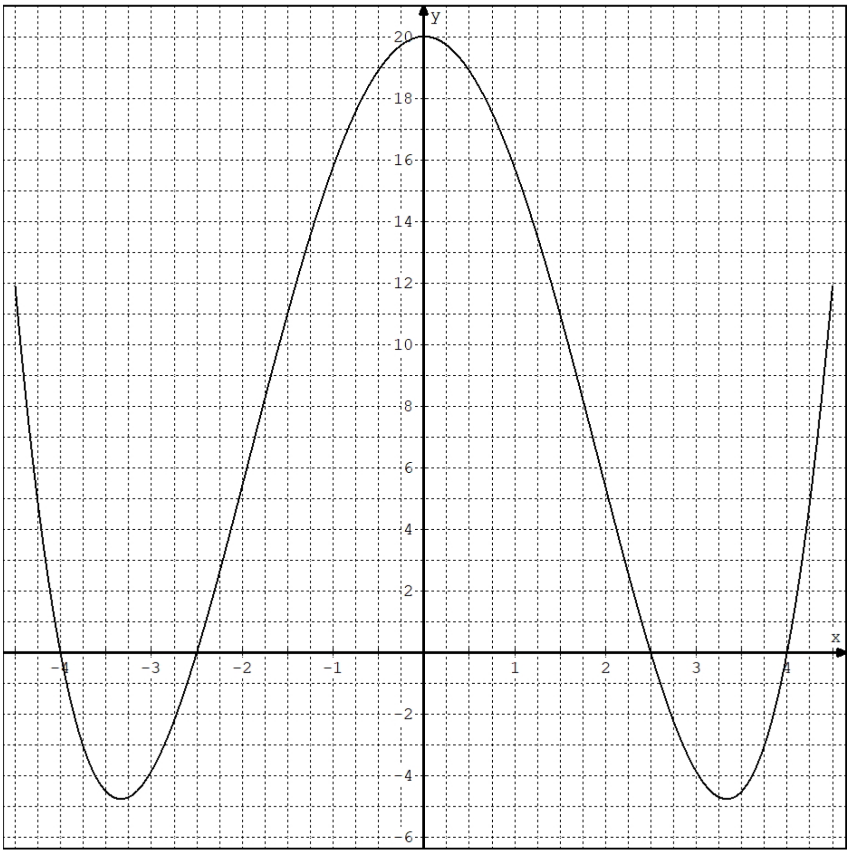
d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f und ermitteln Sie zum Wendepunkt im ersten Quadranten eine Gleichung der Wendetangente t.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-4{,}5 \le x \le 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

f) Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der gesamten Fläche, die G_f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	3	6	8	7	3	5	32

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	G_f ist symmetrisch zur y-Achse, da alle Exponenten gerade sind bzw. $f(x) = f(-x)$.	1
	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	2
1b)	$f(x) = 0$ mit $z = x^2$ $0 = z^2 - 22{,}25z + 100$ $z_1 = 16$; $z_2 = \frac{25}{4}$ $x_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm 2{,}5$	4
	$S_{x1}(-4\|0)$; $S_{x2}(4\|0)$; $S_{x3}(-2{,}5\|0)$; $S_{x4}(2{,}5\|0)$	1
	$S_y(0\|20)$	1
1c)	$f'(x) = 0{,}8x^3 - 8{,}9x$; $f''(x) = 2{,}4x^2 - 8{,}9$	2
	$f'(0) = 0$ und $f''(0) = -8{,}9 < 0$ x_1 ist eine Extremstelle	2
	$0 = 0{,}8x^3 - 8{,}9x = x \cdot (0{,}8x^2 - 8{,}9)$ $0 = 0{,}8x^2 - 8{,}9$ $x_2 \approx 3{,}34$; $x_3 \approx -3{,}34$	2
	$f''(3{,}34) \approx 17{,}87 > 0$; $f(3{,}34) \approx -4{,}75$; $T_1(3{,}34\|-4{,}75)$ $f''(-3{,}34) \approx 17{,}87 > 0$; $f(-3{,}34) \approx -4{,}75$; $T_2(-3{,}34\|-4{,}75)$	2
1d)	$f'''(x) = 4{,}8x$	1
	$f''(x) = 2{,}4x^2 - 8{,}9 = 0$ $x_1 \approx 1{,}93$; $x_2 \approx -1{,}93$	2
	$f'''(1{,}93) \approx 9{,}26 \neq 0$; $f(1{,}93) \approx 6{,}2$; $W_1(1{,}93\|6{,}2)$ $f'''(-1{,}93) \approx -9{,}26 \neq 0$; $f(-1{,}93) \approx 6{,}2$; $W_2(-1{,}93\|6{,}2)$	2
	im ersten Quadranten liegt $W_1(1{,}93\|6{,}2)$; $f'(1{,}93) \approx -11{,}43$ $\rightarrow$ $n \approx 28{,}26$ t: $y = -11{,}43x + 28{,}26$	2

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>1e)</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1f)</td><td>$A_1 = \int_{2,5}^{4} f(x)dx = \left|\left[0{,}04x^5 - \frac{89}{60}x^3 + 20x\right]_{2,5}^{4}\right| = \left|\left(\frac{1952}{75}\right) - \left(\frac{1475}{48}\right)\right| \approx 4{,}70\text{ FE}$

$A_2 = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)dx = \left[0{,}04x^5 - \frac{89}{60}x^3 + 20x\right]_{-2,5}^{2,5} = \left(\frac{1475}{48}\right) - \left(-\frac{1475}{48}\right) \approx 61{,}46\text{ FE}$

$A = 2 \cdot A_1 + A_2 = 70{,}86\text{ FE}$

Hinweis: Bei Verwendung von 1,48 statt $\frac{89}{60}$ ergeben sich leichte Abweichungen:
$A_1 \approx 4{,}54$ FE; $A_2 \approx 61{,}56$ FE; $A = 70{,}64$ FE</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>32</td></tr>
</table>

2. Aufgabe: Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Ein Hersteller fertigt derzeit ein Spielhaus „Lotti“ für Kindertagesstätten an. Das Haus hat die Form eines Quaders mit einem aufgesetzten dreiseitigen Prisma (siehe Abbildung 1). Die Grundfläche des Spielhauses ist quadratisch mit einer Seitenlänge von zwei Metern. Die Höhe des Quaders und die Höhe des Daches betragen jeweils einen Meter. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu.

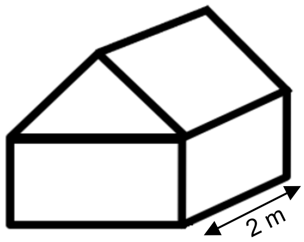


Abbildung 1: Schrägansicht Spielhaus „Lotti“

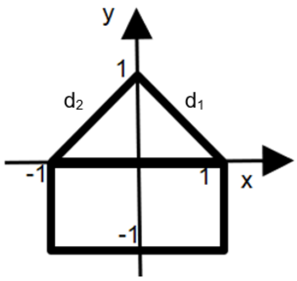


Abbildung 2: Frontansicht Spielhaus „Lotti“

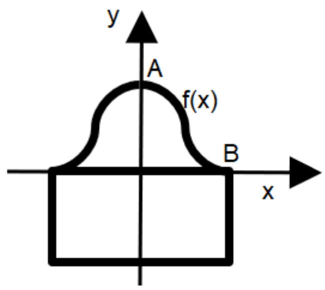


Abbildung 3: Frontansicht Spielhaus „Pauli“

a) Geben Sie den Anstieg der rechten Dachschräge d_1 und der linken Dachschräge d_2 an und berechnen Sie die Länge dieser Dachschrägen (siehe Abbildung 2).

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Querschnittes (Frontansicht aus Abbildung 2) und das Volumen des Spielhauses „Lotti“.

Der Hersteller möchte sein Sortiment um ein weiteres Spielhaus namens „Pauli“ erweitern. Dabei soll nur die Dachform verändert werden. Die rechte Dachschräge d_1 im ersten Quadranten soll durch einen Teil des Graphen G_f einer Funktion f ersetzt werden (siehe Abbildung 3). Dieser Teil von G_f startet in einem Extrempunkt A(0|1) und endet in einem Sattelpunkt B(1|0). Die linke Dachseite ergibt sich durch Spiegelung der rechten Seite.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die beschriebenen Vorgaben der Punkte A und B durch die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 1$ erfüllt werden.

d) Aus Sicherheitsgründen darf das Dach nicht zu steil abfallen.
Ermitteln Sie anhand der Funktion f den steilsten Anstieg der rechten Dachhälfte.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	3	8	4	18

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	Anstiege: $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$; $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ Länge Dachschräge: $d_1 = d_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2)} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ LE Die Anstiege sind $m_1 = -1$ und $m_2 = 1$. Die Dachschrägen sind je 1,41 m lang.	3
2b)	$A = A_{\square} + A_{\Delta} = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 3$ FE $V = A \cdot 2 = 6$ VE Die Querschnittsfläche hat einen Inhalt von 3 m² und das Volumen des Hauses beträgt 6 m³.	3
2c)	$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x$; $f''(x) = -36x^2 + 48x - 12$; $f'''(x) = -72x + 48$ A: $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -12 < 0$ A(0|1) ist ein Extrempunkt B: $f(1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f''(1) = 0$; $f'''(1) = -24 \neq 0$ B(1|0) ist ein Sattelpunkt Die Punkte A und B erfüllen die Vorgaben.	3 5
2d)	Im Wendepunkt ist der Anstieg am größten. $f''(x) = 0 = -36 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)$ $x_{1/2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{3}$ $x_1 = 1$ ist eine Sattelstelle und entfällt; $f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 24 \neq 0$ $m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{9} \approx -1{,}78$ Der steilste Anstieg von der rechten Dachhälfte beträgt m = –1,78.	2 2
	Summe	18

3. Aufgabe: Stochastik

Auf einer Speisekarte werden 6 Vorspeisen und 15 Hauptgänge angeboten.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für…
- I: … das Zusammenstellen eines zweigängigen Menüs.
- II: … das Auswählen von zwei verschiedenen Hauptgängen.
- III: … das Anordnen aller Vorspeisen und anschließend aller Hauptgänge auf der Karte.

b) Insgesamt gibt es 720 Möglichkeiten ein zweigängiges Menü und ein Getränk aus der Karte zusammenzustellen.
Bestimmen Sie, wie viele Getränke demzufolge auf der Karte angeboten werden.

Die Gaststätte bietet ausgewählte Gerichte als Mittagsmenü bestehend aus Vorspeise, Hauptspeise und Nachspeise an (siehe nachfolgende Tabelle). Die Erfahrung zeigt, dass von den Gästen 70 % einen Salat wählen. Hauptgänge und Nachspeisen werden jeweils zu gleichen Anteilen ausgewählt. Diese Werte werden als Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Aufgaben angenommen.

Mittagsmenü					
Vorspeisen		**Hauptgänge**		**Nachspeisen**	
Nudelsuppe	2 €	**L**asagne	5 €	**E**is	2 €
Salat	2 €	**B**ackfisch	8 €	**K**uchen	2 €
				Crêpe	2 €

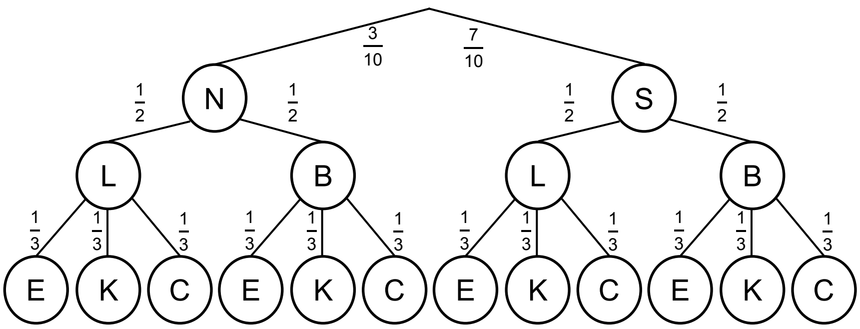
c) Geben Sie alle möglichen Menüfolgen in einer Ergebnismenge Ω an.
Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um ein Laplace Experiment handelt.

d) Zeichnen Sie für die Zusammenstellung des Mittagsmenüs ein vollständiges Baumdiagramm.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Ein Gast wählt genau die Kombination aus Nudelsuppe, Backfisch und Eis.
B: Ein Gast wählt den Backfisch nicht aus.
C: Alle drei Gäste an einem Tisch wählen einen Salat als Vorspeise aus.

e) Ermitteln Sie die Höhe der Einnahmen, mit denen der Gastwirt beim Verkauf von 150 Mittagsmenüs durchschnittlich rechnen kann. Berechnen Sie, wie viele Menüs verkauft werden müssen, um mindestens 2000 Euro einzunehmen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	5	2	3	6	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	I: $6\cdot 15 = 90$ Möglichkeiten für die Zusammenstellung II: $C_{15}^{2} = \binom{15}{2} = 105$ Möglichkeiten der Auswahl III: $6!\cdot 15! \approx 9{,}42\cdot 10^{14}$ Möglichkeiten der Anordnung	1 2 2
3b)	$\frac{720}{6\cdot 15} = 8$ Getränke werden angeboten.	2
3c)	$\Omega = \left\{\begin{matrix}(N,L,E);(N,L,K);(N,L,C);(N,B,E);(N,B,K);(N,B,C);\\(S,L,E);(S,L,K);(S,L,C);(S,B,E);(S,B,K);(S,B,C)\end{matrix}\right\}$ Es handelt sich um kein Laplace Experiment, weil nicht alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.	3
3d)	N: Nudelsuppe; S: Salat; L: Lasagne; B: Backfisch; E: Eis; K: Kuchen; C: Crêpe  $P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{20} = 5\ \%$ $P(B) = \frac{1}{2} = 50\ \%$ $P(C) = \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000} = 34{,}3\ \%$	3 1 1 1
3e)	$150\cdot 2 + 150\cdot 0{,}5\cdot 5 + 150\cdot 0{,}5\cdot 8 + 150\cdot 2 = 1575$ Die durchschnittliche Einnahme beträgt 1575 Euro. $x\cdot(2 + 0{,}5\cdot 5 + 0{,}5\cdot 8 + 2) = 2000$ $x \approx 190{,}48$ Es müssten 191 Menüs verkauft werden, um mindestens 2000 Euro einzunehmen.	4
	Summe	20