LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2020/2021

Mathematik A

07. Mai 2021 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - x + 8$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an und nennen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass es außer der Nullstelle x = 8 keine weiteren gibt und geben Sie den Anstieg des Graphen G_f an dieser Stelle an.

c) Berechnen Sie die Koordinaten und die Art aller Extrempunkte von G_f und geben Sie das Monotonieverhalten an.

d) Prüfen Sie, ob einer der folgenden Punkte der Wendepunkt des Graphen ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung mathematisch.

$W_1\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{925}{108}\right)$; $W_2\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{1445}{108}\right)$; $W_3\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{400}{27}\right)$; $W_4\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{350}{11}\right)$

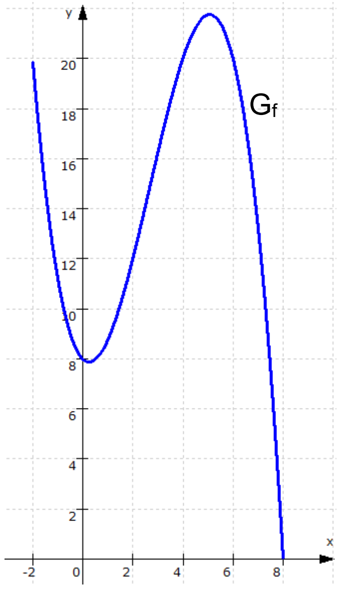
e) Der Punkt $S_y(0|8)$ liegt auf G_f. Ermitteln Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden weiteren Punkte von G_f, die einen Funktionswert von y = 8 besitzen.

f) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

g) G_f schließt zusammen mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
Punkte	5	4	8	3	4	3	3	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	2
	$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 1$; $f''(x) = -\frac{3}{2}x + 4$; $f'''(x) = -\frac{3}{2}$	3
1b)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - x + 8 = 0$ mit $x_1 = 8$ $\left(-\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - x + 8\right) : (x - 8) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$ $-\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$ $x^2 = -4$ hat keine weiteren Lösungen. Somit ist $x_1 = 8$ die einzige Lösung.	3
	$f'(8) = -17$	1
1c)	$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 1 = 0$ $x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3} = 0$ $x_1 \approx 5{,}07$; $x_2 \approx 0{,}26$	3
	$f''(5{,}07) \approx -3{,}61 < 0$; $f(5{,}07) \approx 21{,}76$; $H(5{,}07 \mid 21{,}76)$ $f''(0{,}26) = 3{,}61 > 0$; $f(0{,}26) \approx 7{,}87$; $T(0{,}26 \mid 7{,}87)$	3
	$-\infty < x < 0{,}26$: G_f ist streng monoton fallend $0{,}26 < x < 5{,}07$: G_f ist streng monoton steigend $5{,}07 < x < \infty$: G_f ist streng monoton fallend	2
1d)	$f''\left(\frac{8}{3}\right) = 0$ $f'''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{2} \neq 0$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{400}{27} \approx 14{,}81$ Somit ist W_3 der Wendepunkt des Graphen.	3
1e)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - x + 8 = 8$ $x\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1\right) = 0$; $x_1 = 0$ $x^2 - 8x + 4 = 0$ $x_2 \approx 7{,}46$ und $x_3 \approx 0{,}54$	4

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1f)		3
1g)	$A = \int\limits_0^8 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8x\right]_0^8 = \frac{352}{3} - 0 \approx 117{,}33$ FE	3
	Summe	30

2. Aufgabe: Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Gummidichtungen (z. B. für Fenster und Türen) können verschiedene Formen haben (siehe Abbildung 1).
Ein Hersteller plant ein neues Modell mit einer Luftkammer zu entwickeln, dessen Querschnitt der Abbildung 2 zu entnehmen ist.
Eine Längeneinheit entspricht 0,5 cm in der Wirklichkeit.
Die Materialstärke wird im Folgenden nicht berücksichtigt.

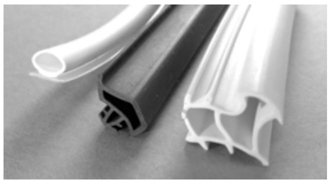


Abbildung 1: Querschnitte von Gummidichtungen

Der obere Teil des Querschnitts kann mit Hilfe der quadratischen Funktion g mit

$$g(x) = -x^2 + 2\,;\ \ x \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden. Der Graph der Funktion heißt G_g.

Der untere Teil lässt sich mit Hilfe des Graphen G_f der Funktion f vierten Grades beschreiben. G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt P(0|–1,5) sowie den Tiefpunkt T(1|–2).

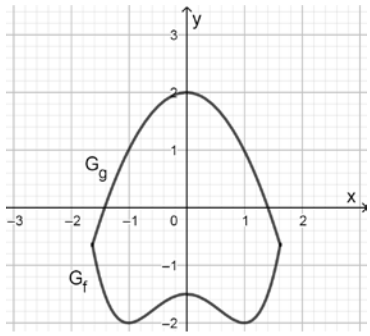


Abbildung 2: Querschnitt des neuen Luftkammermodells

a) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben zur Funktion f eine zugehörige Funktionsgleichung.
(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}$)

b) Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g.

c) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Maßstabs die Gesamthöhe und die Gesamtbreite einer solchen Gummidichtung.

d) Zeigen Sie, dass der Querschnittsflächeninhalt der Luftkammerdichtung etwa A = 2,28 cm² beträgt.

Die Dichtungen werden auf Rollen von 8 m Länge geliefert.
Geben Sie das Luftvolumen an, dass auf einer solchen Rolle in der Luftkammer eingeschlossen ist.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	7	4	3	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $f(0) = -1{,}5$: $c = -1{,}5$ $f(1) = -2$: $a + b + c = -2$ $f'(1) = 0$: $4a + 2b = 0$ Lösen des LGS ergibt: $f(x) = 0{,}5x^4 - x^2 - 1{,}5$	2 3 2
2b)	$f(x) = g(x)$ $0{,}5x^4 - 3{,}5 = 0$ $x^4 = 7$ $x_{1,2} \approx \pm 1{,}63$ $g(\pm 1{,}63) \approx -0{,}66$ Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $S_{1/2}(\pm 1{,}63 \mid -0{,}66)$. Hinweis: Bei der Nutzung der exakten x-Koordinate oder Nutzung der Funktion f können sich Abweichung in der zweiten Dezimalstelle von y ergeben.	4
2c)	Gesamthöhe: Aus $T(1\|-2)$ von G_f und dem Scheitelpunkt $S(0\|2)$ von G_g folgt eine Differenz von 4 LE. Die Gesamthöhe beträgt somit 2 cm. Gesamtbreite: Die Differenz der Schnittstellen von 3,26 LE entspricht 1,63 cm.	3
2d)	$f(x) - g(x) = 0{,}5x^4 - 3{,}5$ (siehe Teilaufgabe b)) $A = \left\| \int_{-1{,}63}^{1{,}63} 0{,}5x^4 - 3{,}5\,dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{10}x^5 - 3{,}5x \right]_{-1{,}63}^{1{,}63} \right\| \approx \|-4{,}55 - 4{,}55\| = 9{,}1$ FE Die Querschnittsfläche besitzt einen Inhalt von etwa 9,1 FE. Das entspricht ca. 2,28 cm² in der Wirklichkeit. Luftvolumen auf einer Rolle: $V = 2{,}28\text{ cm}^2 \cdot 800\text{ cm} = 1824\text{ cm}^3$ (= 1,824 l)	5 1
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Blumengeschäft plant den Verkauf für den anstehenden Muttertag. Im Vorjahr wurden schwerpunktmäßig Rosen in 5 verschiedenen Farben und zu unterschiedlichen Preisen angeboten, wie in der folgenden Tabelle dargestellt wurde.

Rosenfarbe	rosa	rot	orange	violett	weiß
Preis pro Stück (Euro)	1,20	2,10	1,50	0,90	1,70
Anzahl verkauft	12	33	15	10	20

a) Berechnen Sie die durchschnittlichen Einnahmen pro verkaufter Rose und die zugehörige Standardabweichung.
Stellen Sie die Verkaufszahlen der einzelnen Rosenfarben in einem geeigneten Diagramm dar.

b) Im Geschäft hätte man gern durchschnittlich 1,70 Euro pro verkaufter Rose eingenommen. Ermitteln Sie, auf welchen Betrag man den Preis für die violetten Rosen hätte festlegen müssen, wenn die Preise der anderen Rosen und auch die Verkaufszahlen unverändert geblieben wären.

c) Bestimmen Sie die Anzahl an Möglichkeiten, drei der erhältlichen Farben für einen Strauß auszuwählen.

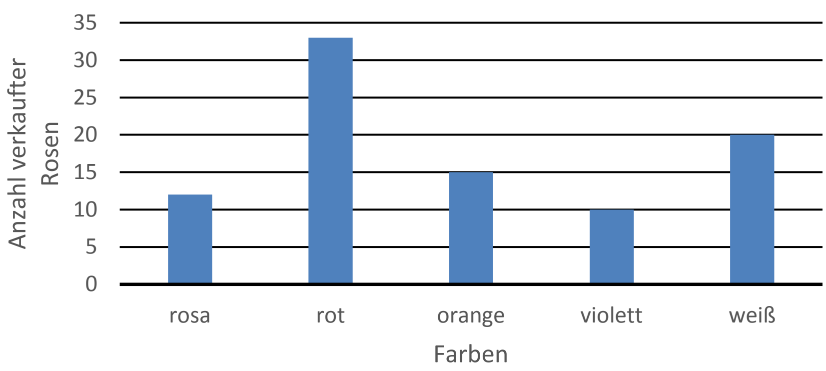
Zusätzlich bestellt der Blumenhändler einen Korb mit 70 Tulpen. Davon sind 30 gelb, 25 rot und der Rest weiß. Als Überraschung darf sich jede Kundin 2 Tulpen kostenlos mitnehmen. Dabei ist die Farbe noch nicht erkennbar, da die Tulpen erst einige Tage später aufblühen.

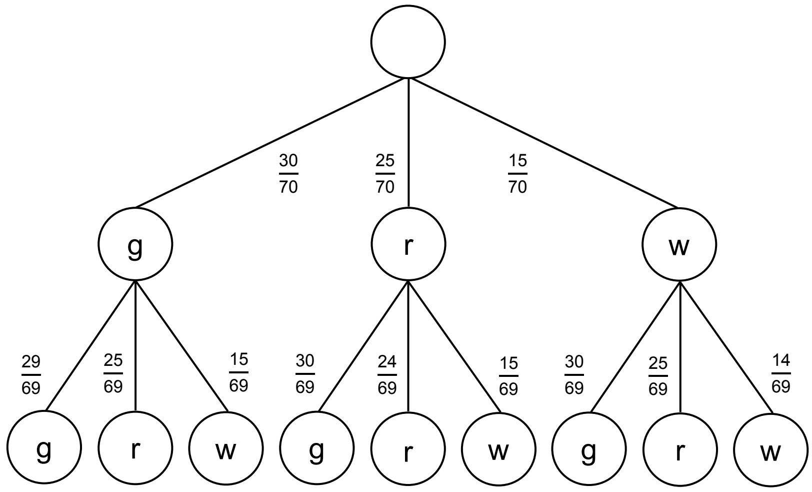
d) Stellen Sie die zufällige Auswahl der ersten 2 Tulpen unter Berücksichtigung der drei Farben in einem vollständigen Baumdiagramm dar und berechnen sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

A: Die erste Kundin erhält zwei weiße Tulpen.
B: Die erste Kundin erhält mindestens eine gelbe Tulpe.
C: Die erste Kundin erhält keine gelbe Tulpe.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Kundinnen nur gelbe Tulpen bekommen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	2	2	8	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	$\bar{x} = \frac{1}{90} \cdot (12 \cdot 1{,}20 + 33 \cdot 2{,}10 + 15 \cdot 1{,}50 + 10 \cdot 0{,}90 + 20 \cdot 1{,}70) \approx 1{,}66$ $\left(s^2 = \frac{1}{90} \cdot \left[12 \cdot (1{,}20 - 1{,}66)^2 + 33 \cdot (2{,}10 - 1{,}66)^2 + \ldots + 20 \cdot (1{,}70 - 1{,}66)^2 \right] \approx 0{,}17 \right)$ $s = \sqrt{0{,}17} \approx 0{,}41$ Hinweis: Bei Verwendung der „n – 1“ - Formel ergeben sich durch die geforderte Rundung auf 2 Dezimalstellen dieselben Werte. Für jede verkaufte Rose wurden durchschnittlich 1,66 Euro eingenommen, bei einer Standardabweichung von 0,41 Euro. 	4 2
3b)	$\frac{1}{90} \cdot (12 \cdot 1{,}20 + 33 \cdot 2{,}10 + 15 \cdot 1{,}50 + 10 \cdot x + 20 \cdot 1{,}70) = 1{,}70$ $x = 1{,}28$ Der Preis für die violetten Rosen hätte auf 1,28 Euro festgelegt werden müssen. Hinweis: Bei alternativen Rechenwegen, die den gerundeten Mittelwert von 1,66 Euro aus a) benutzen, kann es zu Abweichungen in der zweiten Dezimalstelle kommen.	2
3c)	Kombinationen ohne Wiederholung: $C_5^3 = \binom{5}{3}$ = 10 Möglichkeiten der Auswahl	2

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3d)		3
	$P(A)=\frac{15}{70}\cdot\frac{14}{69}=\frac{1}{23}\approx 4{,}35\,\%$	1
	$P(B)=\frac{30}{70}+\frac{25}{70}\cdot\frac{30}{69}+\frac{15}{70}\cdot\frac{30}{69}=\frac{109}{161}\approx 67{,}70\,\%$	2
	$P(C)=1-P(B)=\frac{52}{161}\approx 32{,}30\,\%$	2
3e)	D: Die ersten vier Tulpen sind alle gelb. $P(D)=\frac{30}{70}\cdot\frac{29}{69}\cdot\frac{28}{68}\cdot\frac{27}{67}\approx 2{,}99\,\%$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,99 % bekommen die ersten beiden Kundinnen nur gelbe Tulpen.	2
	Summe	20