Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2013/2014

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	12. Juni 2014
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus- Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ____ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	**Soll**	**Ist**	**Ist (ggf. Zweitkorrektur)**
1	42		
2	16		
3	15		
4	27		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		______ **Punkte** **Note:**______	______ **Punkte** **Note:**______
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 Funktionsuntersuchung /42

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 13, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen G_f und begründen Sie Ihre Aussage. **/3**

Berechnen Sie anschließend den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der *y*-Achse.

1.2 Die einzige Nullstelle x_N des Funktionsgraphen G_f liegt im Intervall [–5; –4]. **/7**

Berechnen Sie einen Näherungswert für diese Nullstelle x_N durch ein geeignetes Verfahren. Brechen Sie die Berechnung nach drei Iterationsschritten ab.

Beurteilen Sie die Genauigkeit des von Ihnen berechneten Näherungswertes.

1.3 Bestimmen Sie die Hoch- und die Tiefpunkte des Funktionsgraphen G_f. **/10**

1.4 Weisen Sie nach, dass $W(1 \mid 10)$ der Wendepunkt des Funktionsgraphen G_f ist. **/4**

1.5 Skizzieren Sie den Funktionsgraphen G_f im Intervall [–4,5; 5] unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**

Berechnen Sie auch die Funktionswerte der Intervallgrenzen.

Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

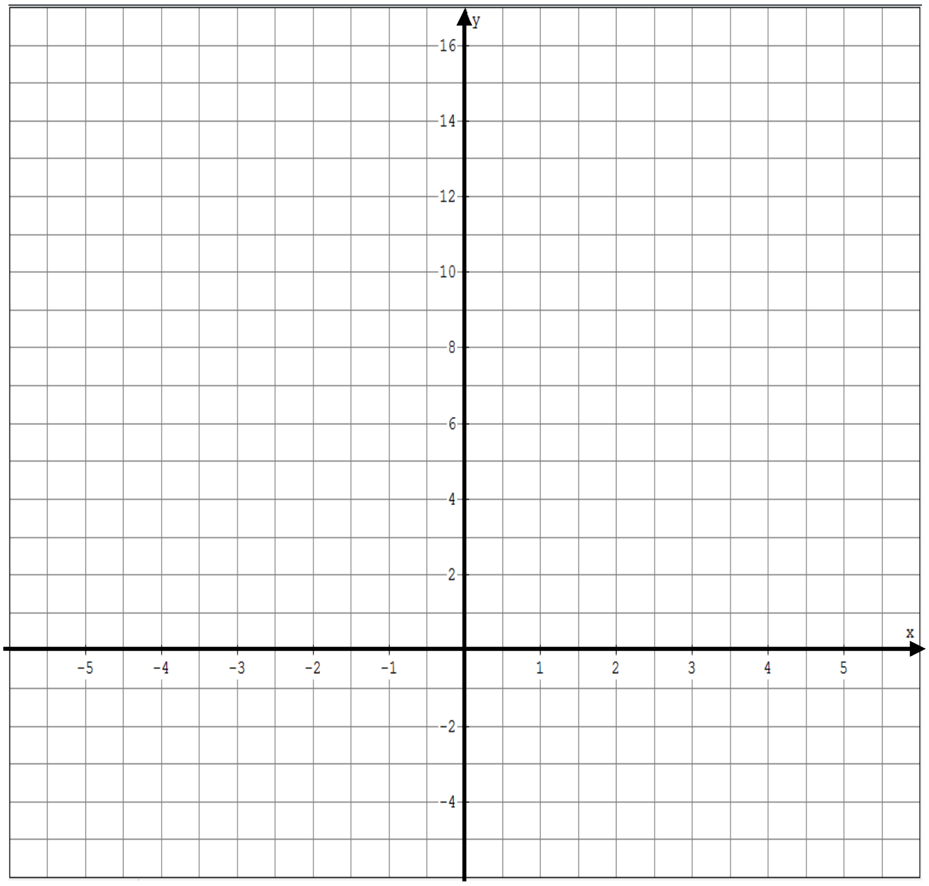
1.6 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Wendetangente mit den Koordinatenachsen. **/6**

1.7 Verschiebt man den Funktionsgraphen G_f um 10 Längeneinheiten in Richtung der *y*-Achse nach unten, erhält man den Funktionsgraphen G_g mit der Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$, **/6**

Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen G_g mit der *x*-Achse.

Fortsetzung auf der folgenden Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1 Funktionsuntersuchung

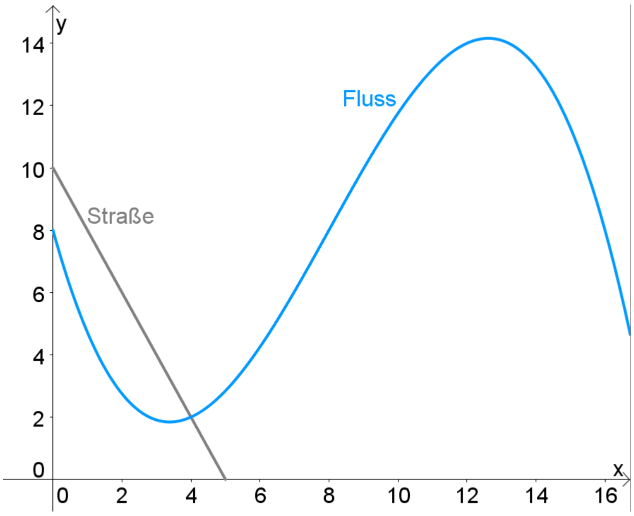


2 Fluss /16

Die Abbildung zeigt eine Karte, auf der der Verlauf eines Flussabschnittes und einer Straße dargestellt sind. 1 LE $\triangleq$ 100 m

Der Verlauf des Flussabschnittes lässt sich durch eine Funktion f dritten Grades beschreiben. Der Fluss geht im Punkt $W(8|8)$ von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung über.

Die Straße trifft bei $x = 4$ auf den Fluss und schneidet ihn in einem rechten Winkel. Der Verlauf der Straße wird durch die Funktion s mit $s(x) = -2x + 10$ beschrieben.



2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Straße den Fluss überquert. **/3**

Welche mathematische Bedeutung hat der Punkt $W(8|8)$ bezüglich des Graphen von f? Begründen Sie Ihre Aussage.

2.2 Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Funktion f auf. Dieses Gleichungssystem sollen Sie nicht lösen. **/7**

2.3 Die Funktionsgleichung der Funktion f kann mithilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden. Lösen Sie dieses und geben Sie die Funktionsgleichung von f an. **/6**

Hinweis: Zum Lösen des Gleichungssystems rechnen Sie mit Brüchen oder mit fünf Nachkommastellen!

Gleichungssystem zum Bestimmen der Funktionsgleichung

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *der Funktion f.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
288a & + & 40b & + & 6c & + & d & = & 5 \\
192a & + & 32b & + & 4c & & & = & 2 \\
64a & + & 22b & + & 5c & + & d & = & 2,5 \\
24a & + & b & & & & & = & 0
\end{array}$$

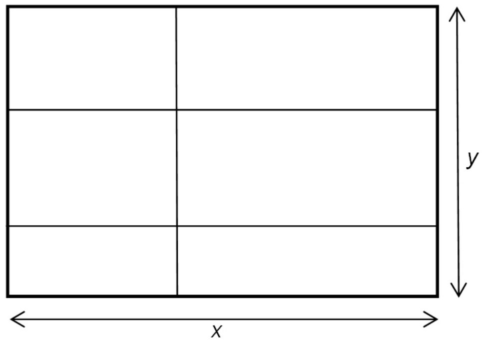
3 Lagerhalle /15

Der Bau einer Lagerhalle wird geplant.

Sie soll eine rechteckige Grundfläche von 800 m² haben und durch zwei Trennwände in *x*- und eine in *y*-Richtung in sechs Räume aufgeteilt werden (siehe Skizze).

Für jeden laufenden Meter Außenwand betragen die Kosten 900 €, für jeden laufenden Meter Innenwand betragen sie 200 €.

Die Maße x und y sollen so optimiert werden, dass die Gesamtkosten für die Wände minimal sind.



3.1 Zeigen Sie, dass man die Zielfunktion für die Berechnung der Gesamtkosten für die Wände mit der Funktionsgleichung /4

$$K(x) = 2\,200\,x + \frac{1\,600\,000}{x} = 2\,200\,x + 1\,600\,000\,x^{-1}$$

beschreiben kann, wenn man als Längeneinheit einen Meter wählt.

3.2 Berechnen Sie mithilfe der Zielfunktion die optimalen Maße der Lagerhalle (auf 1 cm genau). /7

Ermitteln Sie die minimalen Gesamtkosten für die Wände.

Fassen Sie die Ergebnisse in einem Antwortsatz zusammen.

[Zur Kontrolle: $K_{\text{min}} \approx 118\,659{,}18$ €]

3.3 Zeigen Sie mithilfe der Zielfunktion, dass die Gesamtkosten für die Wände nur um ca. 0,1 % größer werden, wenn man von den optimalen Maßen abweicht und einen gleich großen, quadratischen Grundriss wählt. /4

4 Stahlskulptur /27

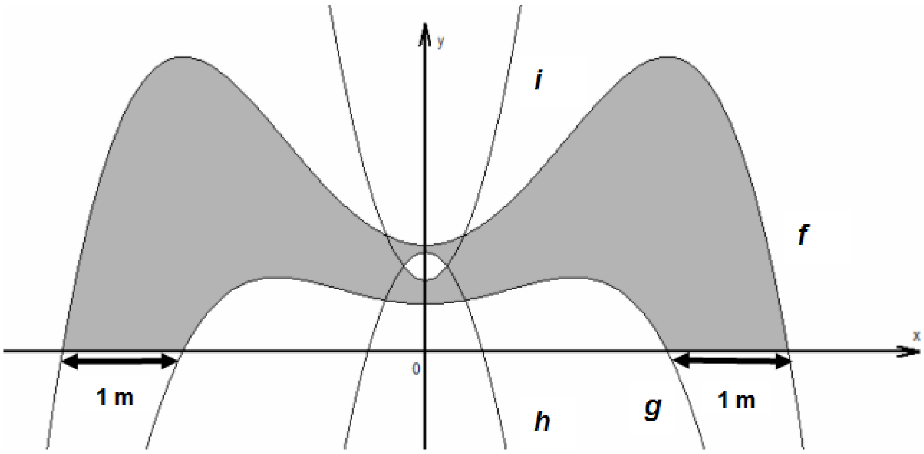
Gegeben sind die vier Funktionen ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^4 + x^2 + \frac{4}{3}$$

$$h(x) = -\frac{25}{2}x^2 + 2{,}8$$

$$i(x) = \frac{25}{2}x^2 + 2$$



Die Abbildung zeigt die Seitenfläche einer Stahlskulptur. Sie wird durch die Graphen der beiden Funktionen *f* und *g* und durch die *x*-Achse begrenzt.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Die Breite der auf dem Boden (*x*-Achse) beginnenden Seitenfläche (der Abstand der Nullstellen der Funktionen *f* und *g*) beträgt einen Meter.

4.1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionsgraphen G_f und G_g sowie der *x*-Achse begrenzt wird. **/17**

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m^2 an.

4.2 In der Mitte der Seitenfläche ist eine Linse ausgeschnitten. Diese Linse wird vollständig durch die Funktionsgraphen G_h und G_i begrenzt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Linse. **/8**

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m^2 an.

4.3 Berechnen Sie den Inhalt der Seitenfläche, die in der obigen Abbildung grau unterlegt ist. **/2**

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m^2 an.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2014
Mathematik

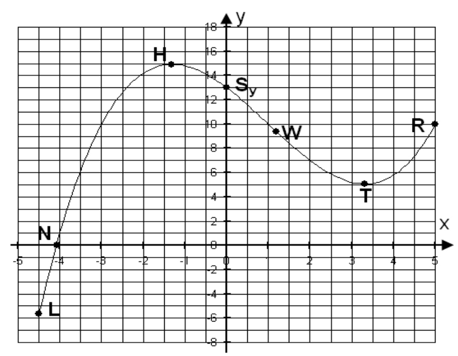
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich.
Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist der korrigierenden Lehrkraft überlassen.

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.1</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen, ist der Funktionsgraph G_f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.
(Oder: Nachweis über die entsprechenden Kriterien.)

Da $f(0) = 13$, ist $S_y(0|13)$ der Schnittpunkt des Funktionsgraphen G_f mit der y-Achse.</td><td>2

1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><th>n</th><th>xn</th><th>f(xn)</th><th>f'(xn)</th><th>f(xn)/f'(xn)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-4,00000000</td><td>1,00000000</td><td>11,80000000</td><td>0,08474576</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-4,08474576</td><td>-0,02166726</td><td>12,31278368</td><td>-0,00175974</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4,08298603</td><td>-0,00000945</td><td>12,30204816</td><td>-0,00000077</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-4,08298526</td><td>0,00000000</td><td>12,30204348</td><td>0,00000000</td></tr>
</table>
oder
<table>
<tr><th>n</th><th>xn</th><th>f(xn)</th><th>f'(xn)</th><th>f(xn)/f'(xn)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-5,00000000</td><td>-14,00000000</td><td>18,40000000</td><td>-0,76086957</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-4,23913043</td><td>-1,99602408</td><td>13,26909263</td><td>-0,15042657</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4,08870387</td><td>-0,07045033</td><td>12,33694422</td><td>-0,00571052</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-4,08299335</td><td>-0,00009953</td><td>12,30209283</td><td>-0,00000809</td></tr>
</table>
Die gesuchte Nullstelle liegt bei $x_N \approx -4,08$.
Je nach Verfahren und Startwert der Berechnung wird eine Aussage getroffen, wie viele Nachkommastellen sich nicht mehr verändern und mit welcher Genauigkeit die Nullstelle bestimmt wurde.</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufg.1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.3	$f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{13}{5} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$ $f'(x) = 0 = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{13}{5}$ $\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2x - \frac{13}{3}$ $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{13}{3}} \approx 1 \pm 2{,}31$ $x_1 \approx 3{,}31 \quad x_2 \approx -1{,}31$ $f''(3{,}31) \approx 3{,}97 > 0 \Rightarrow T \ (3{,}31 \mid 5{,}07)$ $f''(-1{,}31) \approx -1{,}57 < 0 \Rightarrow H \ (-1{,}31 \mid 14{,}93)$	2 4 4				
1.4	Nachweis über die entsprechende hinreichende und notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5} \quad und \quad f'''(x) = \frac{6}{5}$ $f''(1) = 0 \quad und \quad f'''(1) \neq 0$ und es ist: $f(1) = 10$	4				
1.5	f(-4,5) = - 5,675 f(5) = 10  Graph	2	4			

Aufg.1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.6	Gegeben: $W(1 \mid 10)$ *und* $m = f'(1) = -\frac{16}{5}$ Gesucht: $t(x) = mx + b$ $10 = (-\frac{16}{5}) \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{66}{5}$ Es ergibt sich: $t(x) = -\frac{16}{5}x + \frac{66}{5}$ $t(0) = \frac{66}{5} \Rightarrow S_y \left(0 \middle\vert \frac{66}{5}\right)$ $t(x) = 0 = -\frac{16}{5}x + \frac{66}{5} \Rightarrow S_x\left(\frac{33}{8} \middle\vert 0\right)$		6			
1.7	$g(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3$ $0 = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3$ $0 = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ $x_1=1$ erfüllt die Gleichung $(x^3 - 3x^2 - 13x + 15):(x-1) = x^2 - 2x - 15$ $0 = x^2 - 2x - 15$ $x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{16} \Rightarrow x_2 = 5; \quad x_3 = -3$ Daraus ergeben sich die Punkte: $S_{x_1}\ (1 \mid 0) \quad S_{x_2}\ (5 \mid 0) \quad S_{x_3}\ (-3 \mid 0)$		6			
	Summe Aufgabe 1:	19	23	0		

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2.1	$f(4)=s(4)=-2\cdot 4+10=2\ \Rightarrow S(4\mid 2)$ Da sich der Verlauf des Flusses und somit das Krümmungsverhalten ändert, besitzt der Graph von f in W einen Wendepunkt. Somit gilt $f''(8)=0$ und $f'''(8)\neq 0$	2	1			
2.2	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$ $f(8)=8$ Wendepunkt $f''(8)=0$ Wendepunkt $f(4)=2$ Schnittpunkt S der Graphen von f und s. $f'(4)=-\frac{1}{m_s}=-\frac{1}{-2}=0{,}5$ s ist Normale bzgl. f in S Gleichungssystem: $512a+64b+8c+d=8$ $48a+2b=0$ $64a+16b+4c+d=2$ $48a+8b+c=0{,}5$		1 1 1 1 1	2		
2.3	Lösungen des Gleichungssystems berechnen $a=-\frac{1}{32}$; $b=\frac{3}{4}$; $c=-4$; $d=8$ Funktionsgleichung: $f(x)=-\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{4}x^2-4x+8$		6			
	Summe Aufgabe 2:	2	12	2		

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung: Die Kosten $K(x,y)=900(2x+2y)+200(2x+y)=2200x+2000y$ sollen minimal sein. Nebenbedingung: $x\cdot y=800 \Leftrightarrow y=\frac{800}{x}$ Zielfunktion durch Einsetzen hergeleitet: $K(x)=2200x+2000\frac{800}{x}=2200x+\frac{1600000}{x}$			4		
3.2	Minimum berechnen: Bestimmen der Ableitungsfunktionen: $K'(x)=2200-1600000x^{-2}$ und $K''(x)=+3200000x^{-3}$ Hinreichende Bedingung: $K'(x)=0$ und $K''(x)>0$ Mögliche Extremstellen: $2200-1600000x^{-2}=0 \Leftrightarrow 2200x^2-1600000=0$ $\Leftrightarrow x_{E1,E2}=\pm 26{,}97$ (negative Lösung nicht sinnvoll) Hinr. Bed. prüfen: $K''(26{,}97)\approx 163{,}16>0 \Rightarrow$ Min. optimales y: $y=\frac{800}{26{,}97}\approx 29{,}66$ minimale Kosten: $K(26{,}97)\approx 118659{,}18$ Für x = 26,97 m und y = 29,66 m ergeben sich die minimalen Gesamtkosten für die Wände in Höhe von 118659,18 €.	2	5			
3.3	Mehrkosten bei quadratischem Grundriss: $x=y=\sqrt{800}$; $K(\sqrt{800})\approx 118793{,}94$ $K(\sqrt{800})-K(26{,}97)=134{,}76$ Prozentsatz: $p=0{,}113$			4		
	Summe Aufgabe 3:	2	5	8		

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4.1	$f(x) = 0 = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3$ $0 = x^4 - 8x^2 - 9$	2				
	Substitution: $u = x^2$ $0 = u^2 - 8u - 9$ $u_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$ $u_1 = 9 \qquad u_2 = -1$		4			
	Einsetzen in die Substitutionsgleichung: $9 = x^2 \qquad -1 = x^2$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_{3/4} \notin R$	3				
	Aus den Nullstellen von *f* und der Abbildung ergeben sich die Nullstellen von g: $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$		1			
	$A_1 = \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3)\ dx$ $= [-\frac{1}{15}x^5 + \frac{8}{9}x^3 + 3x]_0^3$ $\approx 16{,}8\ FE$ $A_2 = \int_0^2 (-\frac{1}{3}x^4 + x^2 + \frac{4}{3})\ dx$ $= [-\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x]_0^2$ $\approx 3{,}2\ FE$		6			
	$A = 2 \cdot A_1 - 2 \cdot A_2 = 27{,}2\ FE$ Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 27,2 m².		1			

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
4.2	$h(x) = i(x)$ $-\frac{25}{2}x^2 + 2,8 = \frac{25}{2}x^2 + 2$ $0 = 25x^2 - \frac{8}{10}$ $0 = x^2 - \frac{4}{125}$ $x_1 \approx 0,18 \qquad x_2 \approx -0,18$	3				
	Außerdem ergibt sich: $d(x) = h(x) - i(x) = -25x^2 + \frac{8}{10}$		1			
	$A_1 = \int_0^{0,18} (-25x^2 + \frac{8}{10})\,dx$ $= [\frac{25}{3}x^3 + \frac{8}{10}x]_0^{0,18}$ $\approx 0,1\ FE$		3			
	$A = 2 \cdot A_1 = 0,2\ FE$ Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 0,2 m².	1				
4.3	$A_G = 27,2\,m^2 - 0,2\,m^2 = 27\ m^2$ Der Inhalt der Seitenfläche beträgt 27 m².		2			
	Summe Aufgabe 4	9	18	0		