Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Herbst 2013

Fach	Mathematik (A)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	2. Dezember 2013
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus- Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ____ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	**Soll**	**Ist**	**Ist (ggf. Zweitkorrektur)**
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	_____ Punkte	_____ Punkte
Maluspunkt	-1	_____ Punkt	_____ Punkt
Insgesamt:		______ **Punkte** **Note:**______	______ **Punkte** **Note:**______
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 Funktionsuntersuchung /40

Die Flugbahn eines neuen Testflugzeugs, das nur mit einem Piloten bemannt ist, lässt sich durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{44000}x^4 + \frac{1}{1375}x^3$$

beschreiben.

Das Testflugzeug startet im Koordinatenursprung und fliegt in die Richtung, die durch die x-Achse angegeben wird. Die gesamte Flugbahn befindet sich im I. Quadranten.

Hinweise: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{km}$

x: Entfernung vom Startpunkt

$f(x)$: Flughöhe

1.1 Nach $10\,\text{km}$ überfliegt das Testflugzeug einen $0{,}1\,\text{km}$ hohen Turm. **/2**

Berechnen Sie den vertikalen Abstand zur Turmspitze in km.

1.2 Genau in dem Moment, in dem das Flugzeug den höchsten Punkt der Flugbahn erreicht, versagt das Triebwerk und das Flugzeug stürzt entlang der vorgegebenen Flugbahn ab. **/10**

Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung (in km) zum Startort der höchste Punkt der Flugbahn erreicht wird.

Berechnen Sie die maximale Flughöhe in km.

[zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{1}{11000}x^3 + \frac{3}{1375}x^2$]

1.3 Berechnen Sie, wie weit (in km) vom Startort entfernt das Testflugzeug aufschlägt. **/4**

1.4 Kurz nachdem der Pilot den Ausfall des Triebwerks bemerkt, steigt er in $1{,}5\,\text{km}$ Höhe aus und schwebt bei völliger Windstille senkrecht mit dem Fallschirm zur Erde zurück. **/8**

Berechnen Sie mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens, wie weit vom Startort entfernt der Pilot landet. Führen Sie zwei Iterationsschritte durch und runden Sie Ihr Ergebnis entsprechend der gefundenen Genauigkeit.

Hinweis: Verwenden Sie als Startwert für die Iteration $x_0 = 29$.

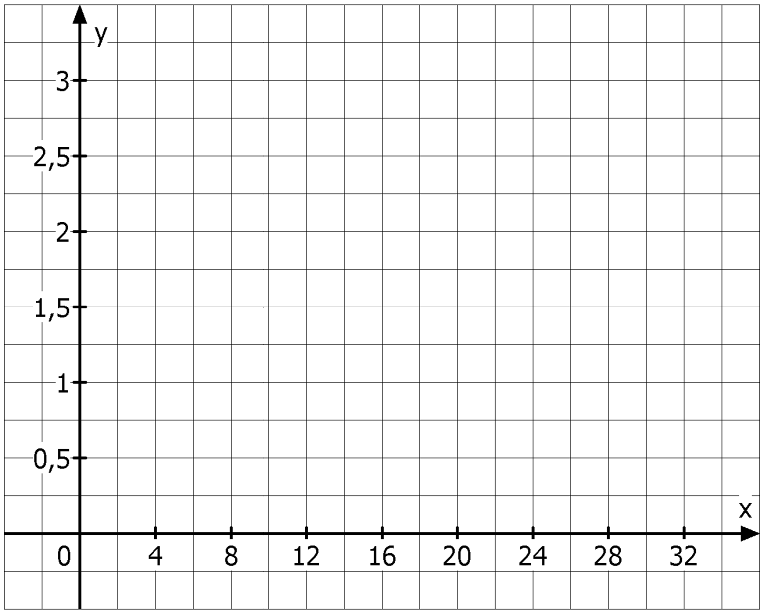
1.5 Ermitteln Sie den Punkt, in dem der Anstiegswinkel der Flugbahn am größten ist. **/11**

Bestimmen Sie den Anstiegswinkel der Flugbahn in diesem Punkt.

1.6 Zeichnen Sie die Flugbahn für $x \in [0\,;32]$ in das Koordinatensystem auf der **nächsten Seite**. **/5**

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 → nächste Seite

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6



2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades besitzt bei $W(0 \mid y_W)$ einen Wendepunkt. Die Steigung der zugehörigen Wendetangente beträgt dort $m = -8$. Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_N = 1$ und der zugehörige Graph den Tiefpunkt $T(2 \mid -7)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f.

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \;;\; x \in \mathrm{IR}$$

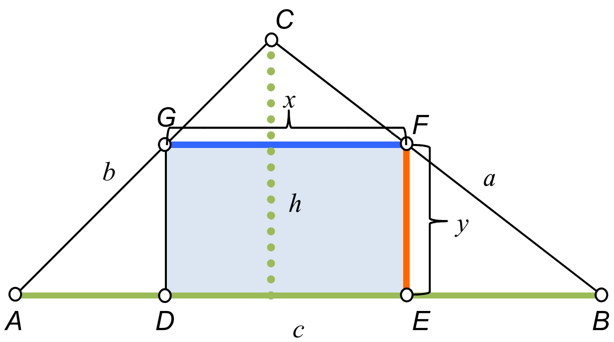
$$\begin{array}{rcccccccccc}
0 & = & & & & & a_2 & & & & \\
-16 & = & & & & & & & 2a_1 & & \\
0 & = & a_4 & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\
\frac{-7}{2} & = & 8\,a_4 & + & 4\,a_3 & + & 2\,a_2 & + & a_1 & + & \frac{1}{2}a_0 \\
0 & = & 8\,a_4 & + & 3\,a_3 & + & a_2 & + & \frac{1}{4}a_1 & &
\end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /15

Einem Dreieck ABC mit der unteren Seite $c = 10$ cm und der Höhe $h = 4$ cm soll ein größtmögliches Rechteck $DEFG$ einbeschrieben werden. Die untere Rechteckseite liegt auf c und die Eckpunkte F und G jeweils auf den Dreiecksseiten a und b (siehe Abbildung).

Hinweis:

Die Zeichnung entspricht nicht genau den in der Aufgabenstellung angegebenen Maßen.



3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion A, mit der der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet werden kann. /6

[zur Kontrolle: $A(y) = \frac{10}{4}\left(4y - y^2\right) \quad ; \quad y \in [0, h]$]

3.2 Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks, für die es den größtmöglichen Flächeninhalt annimmt. /8

3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt für dieses Rechteck. /1

4 Integralrechnung /30

Gegeben ist die Funktion f mit: $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$; $x \in \mathbb{R}$.

4.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der Funktion f. **/6**

[zur Kontrolle: $x_{N1} - 1$; $x_{N2} = 1{,}5$; $x_{N3} = 4$]

4.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der vom Graphen von f und der x-Achse vollständig eingeschlossenen Fläche. **/8**

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

4.3 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}$. Erklären Sie das Ergebnis. **/4**

4.4 Gegeben sei außerdem die Funktion g mit $g(x) = -x^4 + x^3 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$; $x \in \mathbb{R}$. **/12**

Die Graphen der Funktionen f und g schließen auf dem Intervall $\mathrm{I} = [-1{,}5\,;1{,}5]$ eine Fläche B vollständig ein.

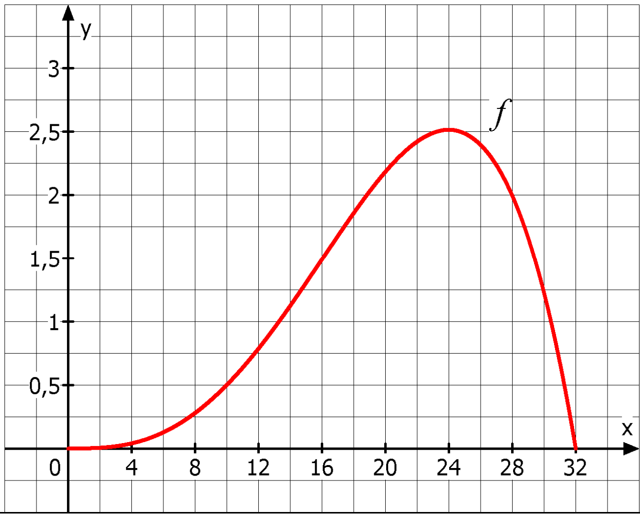
Zeigen Sie, dass die Differenzfunktion h mit $h(x) = f(x) - g(x)$ keine weiteren Nullstellen in dem Intervall I besitzt.

[zur Kontrolle: $h(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9$]

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche B.

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(10)=0{,}5$. Das Flugzeug hat über dem Turm eine Flughöhe von $0{,}5\text{ km}$. Die Flughöhe über der Turmspitze beträgt demnach $0{,}4\text{ km}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Es gilt: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$.
$f'(x)=-\frac{1}{11000}x^3+\frac{3}{1375}x^2$
$f''(x)=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$
$0=-\frac{1}{11000}x^3+\frac{3}{1375}x^2$
$=x^2\left(-\frac{1}{11000}x+\frac{3}{1375}\right)$
$x_{E1,2}=0$; $x_{E3}=24$
$x_{E1,2}=0$ ist der Startort, daher nicht sinnvoll.
$f''(24)\approx -0{,}05<0$; Hochpunkt
$f(24)\approx 2{,}51$
Die maximale Flughöhe wird 24 km vom Startort entfernt erreicht, sie beträgt etwa $2{,}51\text{ km}$.</td><td></td><td>2
8</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Nullstellen: $f(x_N)=0$
$0=-\frac{1}{44000}x^4+\frac{1}{1375}x^3$
$=x^3\left(-\frac{1}{44000}x+\frac{1}{1375}\right)$
$x_{1,2,3}=0$; $x_4=32$
Das Flugzeug schlägt 32 km vom Startort entfernt auf.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Zu lösen ist die Gleichung $f(x)=1{,}5$ bzw.
$0=-\frac{1}{44000}x^4+\frac{1}{1375}x^3-1{,}5$ mit einem Näherungsverfahren.
Newton: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Startwert z. B. $x_0=29$
$x_1\approx 29{,}42609988$
$x_2\approx 29{,}40389979$
Eine Stelle nach dem Komma stimmt überein, der Pilot steigt etwa $29{,}4\text{ km}$ vom Startort entfernt aus.</td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Teil-
aufgabe</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th></th><th></th><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Am steilsten ist die Flugbahn im Wendepunkt.
Für Wendepunkte gilt: $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$
$f''(x)=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$
$f'''(x)=-\frac{6}{11000}x+\frac{6}{1375}$

$0=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$
$0=x\left(-\frac{3}{11000}x+\frac{6}{1375}\right)$
$x_{W1}=0;\ x_{W2}=16$
$f'''(0)=-\frac{6}{1375}>0;\ f'''(16)=-\frac{6}{1375}<0$
$x_{W1}=0$ ist der Startpunkt, am steilsten steigt das Flugzeug demnach bei $x_{W2}=16$.
$f(16)\approx 1{,}49$
Der Punkt des steilsten Anstiegs ist der Wendepunkt $P_W(16\,|\,1{,}49)$.
Anstieg bei $x_{W2}=16$: $f'(16)\approx 0{,}186$, $\arctan(0{,}186)\approx 10{,}54°$.
16 km nach dem Start steigt das Flugzeug am steilsten, der Bahnneigungswinkel beträgt dort 10,54°.</td><td></td><td>4</td><td>4
3</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>14</td><td>19</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2	Ansatz: $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ $f'(x)=4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$ $f''(x)=12a_4x^2+6a_3x+2a_2$	3		
	Bedingungsgefüge: 1. $f''(0)=0$ (Wendepunkt $W(0\|y_W)$) 2. $f'(0)=-8$ (Steigung der Wendetangente) 3. $f(1)=0$ (Nullstelle $x=1$) 4. $f(2)=-7$ (Tiefpunkt $T(2\|-7)$) 5. $f'(2)=0$ (Steigung der Tangente im Tiefpunkt) Gleichungssystem: $\begin{array}{llllllllllll} \text{I.} & 0 & = & & & & & 2a_2 & & & & \\ \text{II.} & -8 & = & & & & & & & a_1 & & \\ \text{III.} & 0 & = & a_4 & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\ \text{IV.} & -7 & = & 16a_4 & + & 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 \\ \text{V.} & 0 & = & 32a_4 & + & 12a_3 & + & 4a_2 & + & a_1 & & \end{array}$		5	
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS) Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a_4=1\,;a_3=-2\,;a_2=0\,;a_1=-8\,;a_0=9$		6	
	Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x)=x^4-2x^3-8x+9$	1		
	Summe	4	11	0
	mögliche BE		15	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Bestimmung der Zielfunktion: $A = x \cdot y$; Hauptbedingung Die Dreiecke ABC und GFC sind ähnlich. $\frac{c}{h} = \frac{x}{(h-y)} \Leftrightarrow c(h-y) = hx$ $x = \frac{c(h-y)}{h}$; Nebenbedingung $A(y) = \frac{c(h-y)y}{h}$; $c = 10$; $h = 4$ $= \frac{10}{4} \cdot (4y - y^2)$ $= 10y - 2{,}5y^2$		1	5
3.2	Bestimmung von x und y: $A'(y) = 10 - 5y$ $A''(y) = -5$ $A'(y) = 0$ $10 - 5y = 0 \Leftrightarrow y = 2$ $A''(2) = -5 < 0$; *Maximum* $x = \frac{c(h-y)y}{h} = 5$ $x = 5\text{ cm}$; $y = 2\text{ cm}$ Der Inhalt des Rechtecks ist maximal für $x = 5$ cm und $y = 2$ cm.	3 5		
3.3	$A = 5 \cdot 2 = 10$ Der Flächeninhalt beträgt 10 cm^2.	1		
	Summe	9	1	5
	mögliche BE	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Nullstellen: $f(x_N)=0$ Erste Nullstelle durch Probieren: $f(-1)=0 \Rightarrow x_{N1}=-1$ Polynomdivision: $\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right):(x+1)=x^2-\frac{11}{2}x+6$ $x^2-\frac{11}{2}x+6=0$; Anwendung der p-q-Formel $x_{N2}=1{,}5$; $x_{N3}=4$.	6		
4.2	$A_1=\int_{-1}^{1,5}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+6x\right]_{-1}^{1,5}$ $\approx 5{,}77-(-4)=9{,}77$ $A_2=\left\vert\int_{1,5}^{4}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}\right\vert=\left\vert\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+6x\right]_{1,5}^{4}\right\vert$ $\approx\vert-4-(5{,}77)\vert=\vert-9{,}77\vert=9{,}77$ $A=A_1+A_2\approx 2\cdot 9{,}77=19{,}54$ FE		3 3 2	
4.3	$\int_{-1}^{4}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}=0$, da die beiden Teilflächen entgegengesetzt gleich groß sind, kompensieren sie sich vollständig, die Bilanz ergibt null.	4		
4.4	$f(x_S)=g(x_S)$ $x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6=-x^4+x^3+\frac{7}{4}x^2+\frac{1}{2}x-3$ $h(x)=x^4-\frac{25}{4}x^2+9$; $h(x)=0$ Substitution mit $z:=x^2$ und p-q-Formel liefern $z_{1,2}=\frac{25}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2-9}=\frac{25}{8}\pm\frac{7}{8}$ $z_1=\frac{9}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1{,}5$; $z_2=4\Rightarrow x_{3,4}=\pm 2$ Keine Nullstellen zwischen $-1{,}5$ und 1,5, zu berechnen ist das Integral $B=\int_{-1,5}^{1,5}\left(x^4-\frac{25}{4}x^2+9\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{25}{12}x^3+9x\right]_{-1,5}^{1,5}$ $\approx 7{,}99-(-7{,}99)=15{,}98$ FE		8 4	
	Summe	10	20	0
	mögliche BE		30	