Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft

Berlin

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2011/2012

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	25. Mai 2012
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil; Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (Duden)
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Aus den fünf Aufgaben **müssen** Sie **drei** auswählen. Die **Aufgabe 1** (Exponentialfunktionen) ist eine **Pflichtaufgabe**. Sie **muss** von allen bearbeitet werden! Zwischen **Aufgabe 2** (Gebrochenrationale Funktionen) und **Aufgabe 3** (Trigonometrische Funktionen) müssen Sie **wählen**. Auch zwischen **Aufgabe 4** (Analytische Geometrie) und **Aufgabe 5** (Stochastik) müssen Sie **wählen**. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchstrichene Lösung zählt.**

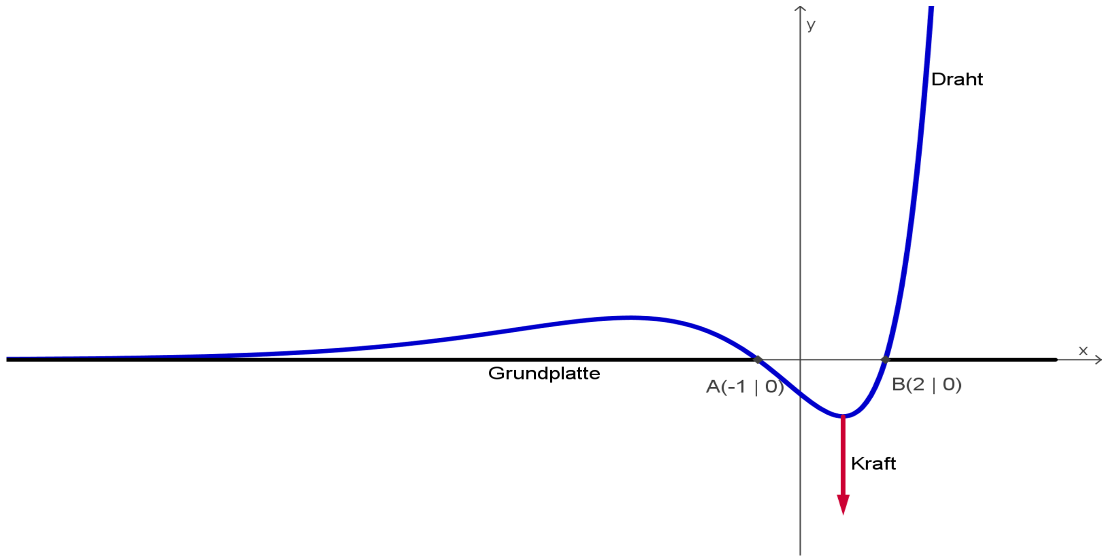
Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: ______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte

Aufgabe Nr.	**Soll %**	**Ist**	**Ist (Zweitkorrektur)**
1	34		
2 oder 3	33		
4 oder 5	33		
Summe:	100		
Notenpunkte	15	**__ /15 Punkten**	**__ /15 Punkten**
Maluspunkt	**-1**	**__ Punkt**	**__ Punkt**
Insgesamt		**__ Punkte**	**__ Punkte**
Datum, Unterschrift:			

1 Exponentialfunktionen **/34**

Die Abbildung stellt einen sehr weit links eingespannten, biegsamen Draht dar. In der Grundplatte befindet sich zwischen den Punkten $A(-1|0)$ und $B(2|0)$ eine Öffnung, durch die der Draht mit einer Kraft nach unten gezogen und dadurch in dargestellter Weise gebogen wird.



(*Darstellung nicht maßstabsgetreu*)

1.1 Der Verlauf des gebogenen Drahtes lässt sich durch eine Exponentialfunktion beschreiben.

Welche der folgenden Funktionsgleichungen passt zum dargestellten Verlauf? **/2**

Begründen Sie Ihre Wahl.

a) $f_1(x)=\frac{1}{2}(2x-1)\cdot e^{-x}$ **b)** $f_2(x)=(x^2-x-2)\cdot e^{x}$ **c)** $f_3(x)=-2(x^2-1)\cdot e^{0,5x}$

Der Verlauf des Drahtes wird ebenfalls durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(x)=(0,5x^2-0,5x-1)\cdot e^{0,5x}$$

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph von f durch die Punkte $A(-1|0)$ und $B(2|0)$ verläuft. **/2**

1.3 Weisen Sie nach, dass $f'(x)=(0,25x^2+0,75x-1)\cdot e^{0,5x}$ die 1. Ableitung von f ist. **/3**

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen der Draht links der Öffnung am weitesten nach oben und in der Öffnung am weitesten nach unten reicht. **/9**

[***Hinweis***: Ein Nachweis mithilfe der 2. Ableitung ist erforderlich.]

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1 Exponentialfunktionen (Fortsetzung)

1.5 In welchen Punkten ändert der Draht seine Krümmungsrichtung? **/5**
[***Hinweis***: Auf einen Nachweis mithilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.6 Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die der Draht mit der x-Achse unterhalb der Grundplatte umschließt? **/5**

Weisen Sie dafür zunächst nach, dass $F(x) = \left(x^2 - 5x + 8\right) \cdot \mathrm{e}^{0,5x}$ eine Stammfunktion von f ist.

Alle Funktionen vom Typ $f_k(x) = \left(x^2 - x - 2\right) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$

berühren die Grundplatte in den Punkten $A\left(-1 \mid 0\right)$ und $B\left(2 \mid 0\right)$.

1.7 Zeigen Sie zunächst, dass für die Ableitung gilt: **/3**

$$f_k'(x) = \left[k \cdot x^2 + \left(2 - k\right) \cdot x - \left(2k + 1\right)\right] \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$$

1.8 Bestimmen Sie k so, dass der Winkel, den der Draht im Punkt $A\left(-1 \mid 0\right)$ mit der Grundplatte bildet, genau 45° beträgt. **/5**

2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Durch die Gleichung $f(x) = \frac{9}{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$, sei eine Funktion f gegeben.

2.1 Untersuchen Sie f auf Symmetrie und berechnen Sie den Extremalpunkt und die Wendepunkte von f.

[***Zur Kontrolle***: $f'(x) = -\frac{18x}{(x^2+3)^2}$] /10

[***Hinweis***: Auf den Nachweis mithilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

2.2 Zeichnen Sie den Graphen für $-4 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem. /4

2.3 Zwischen der x-Achse und dem Graphen von f soll ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden.

Bestimmen Sie die Abmessungen dieses Rechtecks.

[***Zur Kontrolle***: $A'(x) = \frac{54-18x^2}{(x^2+3)^2}$] /6

[***Hinweis***: Auf einen Nachweis mithilfe der 2. Ableitung kann verzichtet werden.]

2.4 Das Dreieck, welches durch die Tangenten bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ und die x-Achse gebildet wird, soll als Vorlage für eine Schablone (Muster) verwendet werden.

Bestimmen Sie die beiden Tangentengleichungen. /5

Zeichnen Sie die Schablone in das Koordinatensystem aus 2.2.

2.5 Die Form der Schablone soll zwischen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ (siehe 2.4) verändert werden. Dabei wird der obere Teil des Dreiecks durch einen Parabelbogen ersetzt, der die Tangenten an f ebenfalls als Tangenten besitzt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel. /8

[***Zur Kontrolle***: $p(x) = -0{,}5625x^2 + 2{,}8125$]

Um wie viel würde der Flächeninhalt der Schablone durch diese Veränderung abnehmen?

3 Trigonometrische Funktionen /33

Gegeben seien die Funktionen f und g und das Intervall $I = [0, \pi]$ mit

$f(x) = 2\sin^2 x - 0{,}5$ und $g(x) = 1{,}5\cos(3x)$.

3.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und g im Intervall I. /6

3.2 Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem. /5

3.3 Neben den beiden gemeinsamen Nullstellen tritt eine weitere Schnittstelle in I auf. Berechnen Sie diese.
[***Hinweis***: Benutzen Sie nur für diesen Aufgabenteil, dass gilt:
$f(x) = 1{,}5 - 2\cos^2 x$ und $g(x) = 6\cos^3 x - 4{,}5\cos x$] /8

3.4 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\pi} \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x$
und begründen Sie, warum der Wert nicht den Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen über I ergibt. /5

3.5 Bestätigen Sie, dass der (senkrechte) Abstand zwischen f und g
bei $x_E = \cos^{-1}\left(\frac{-2+\sqrt{85}}{18}\right) \approx 1{,}158094466$ ein relatives Maximum annimmt. /6

3.6 Berechnen Sie den Parameter k für eine g-ähnliche Funktion $g^*(x) = k\cos(3x)$, die f nicht an der in 3.3 berechneten Stelle, sondern an der Stelle $\frac{2\pi}{3}$ schneidet. /3

4 Analytische Geometrie /33

Es soll eine Sonnenuhr konstruiert werden. Der Schattenstab mündet an seinem oberen Ende in einer geraden Pyramide. Drei Punkte dieser Pyramide sind:

$A(3|-2|1)$, $B(3|3|1)$ und $C(6|3|5)$ (1 LE ≙ 1 cm)

In der Konstruktionsplanung ist auch die folgende Punktmenge vorgesehen:

$P_k(3k|3+5k|9{,}5+4k)$, $k \in \mathbb{R}$

4.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eindeutig eine Ebene E bestimmen. /3

4.2 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für diese Ebene E.
[***Zur Kontrolle***: $E: 4x-3z=9$] /4

4.3 Begründen Sie, dass ein weiterer Punkt D so gewählt werden kann, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. /3

4.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D und des Mittelpunktes M dieses Quadrates. /2

4.5 Die Punkte der Punktmenge P_k bilden eine Gerade g, auf der ein Sonnenstrahl liegt.

Geben Sie die Geradengleichung für g an und zeigen Sie, dass g parallel zur Ebene E verläuft, aber nicht in E liegt. /3

4.6 Der Sonnenstrahl auf der Geraden g trifft auf die Pyramidenspitze S.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S und den Winkel $\angle ASC$. /7

[***Zur Kontrolle***: $S(-1{,}5|0{,}5|7{,}5)$]

4.7 Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. /4

4.8 Die Sonnenuhr wird so auf einem Berliner Schulhof aufgestellt, dass die x-y-Ebene parallel zur Schulhofebene verläuft und die Achse SM der Sonnenuhr nach Norden zeigt.
Die Sonnenuhr muss so ausgerichtet werden, dass die Achse SM parallel zur Erdachse verläuft. Der Winkel zwischen Erdachse und Schulhofebene beträgt in Berlin 52°. /4

Um wie viel Grad muss der Winkel α, der von der Achse SM und der x-y-Ebene bisher eingeschlossen wird, korrigiert werden, damit die Achse SM parallel zur Erdachse verläuft?

4.9 Der nun parallel zur Erdachse ausgerichtete Schattenstab einschließlich der Pyramide sei 2 m lang.

Berechnen Sie die Länge s des Schattens, wenn die Sonnenstrahlen parallel zur Geraden g auf die Erde treffen. /3

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Auf einer fernen Insel sollen in Vergnügungsparks nur faire Glücksspiele angeboten werden, d. h. auf lange Sicht darf der Veranstalter nur das einnehmen, was er auszahlt. Seine Kosten und sein Gewinn werden durch die Eintrittsgelder gedeckt.
Ein Veranstalter bietet für den Einsatz von einem Taler (T) das folgende Glücksspiel an: In einer Urne liegen vier Kugeln mit den Zahlen 1, 1, 3 und 4. Der Spieler zieht **ohne Zurücklegen** so lange Kugeln, bis die Summe der Zahlen 4 oder größer ist. Benötigt er nur einen Zug, so erhält der Spieler drei Taler ausgezahlt. Benötigt der Spieler zwei Züge, so erhält er einen halben Taler zurück. Ansonsten geht er leer aus.

5.1 Erstellen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm, mit dessen Hilfe Sie die folgenden Fragen beantworten können:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt der Spieler nur einen Zug?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt der Spieler zwei Züge? /6

Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt der Spieler mehr als zwei Züge?

[***Zur Kontrolle***: Die Ergebnisse sind angenähert: 0,25; 0,58 und 0,17]

5.2 Mit $G =$ Auszahlung $-$ Einsatz werde der Gewinn des Spielers bezeichnet.

Der Gewinn kann also durchaus auch negativ sein.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G und den Erwartungswert $E(G)$, also den durchschnittlichen Gewinn, z. B. mit Hilfe einer übersichtlichen Tabelle. /5

[***Zur Kontrolle***: $E(G) = \frac{1}{24}\,\mathrm{T}$]

Nach einer Saison ist dem Veranstalter aufgefallen, dass dieses Glücksspiel zwar den Spielern, nicht aber ihm Glück bringt. Daher lässt er die Spieler nun **mit Zurücklegen** ziehen. Die anderen Spielregeln bleiben unverändert.

5.3 Weisen Sie nach, dass das Spiel nun fair ist. /4

Mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ muss der Veranstalter bei beiden Spielvarianten pro Spiel drei Taler an den Spieler auszahlen.

5.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Veranstalter bei den kommenden zehn Spielen zwischen zwei- und viermal drei Taler auszahlen muss. /5

5.5 Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss der Veranstalter in den kommenden vier Spielen nicht einmal drei Taler auszahlen, wohl aber im fünften Spiel? /2

5.6 Pro Tag wird das Spiel im Mittel 100 Mal gespielt.

Wie oft wird der Veranstalter im Mittel drei Taler auszahlen müssen? /1

Fortsetzung auf der nächsten Seite

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fortsetzung)

Der folgende Aufgabenteil hat mit den vorangegangenen sechs nichts zu tun.

5.7 In einer Urne liegen 30 Kugeln, rote und schwarze. Es werden drei Kugeln **ohne Zurücklegen** und **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge** gezogen.

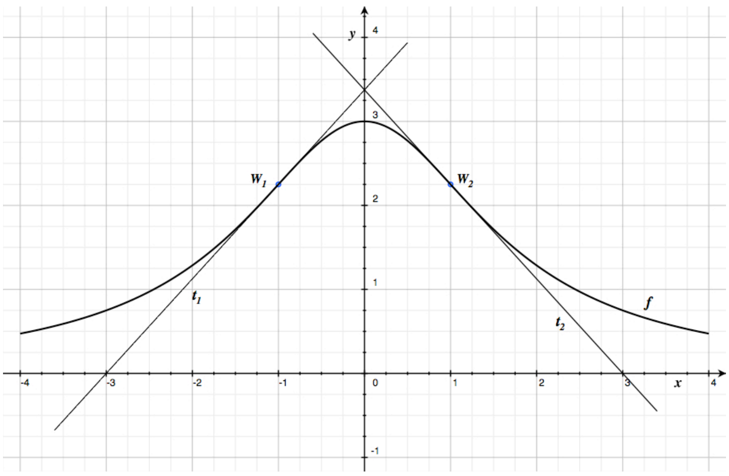
Wie viele rote Kugeln müssen in der Urne liegen, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei rote und eine schwarze Kugel zu ziehen, maximal wird?

Wie groß ist diese maximale Wahrscheinlichkeit?

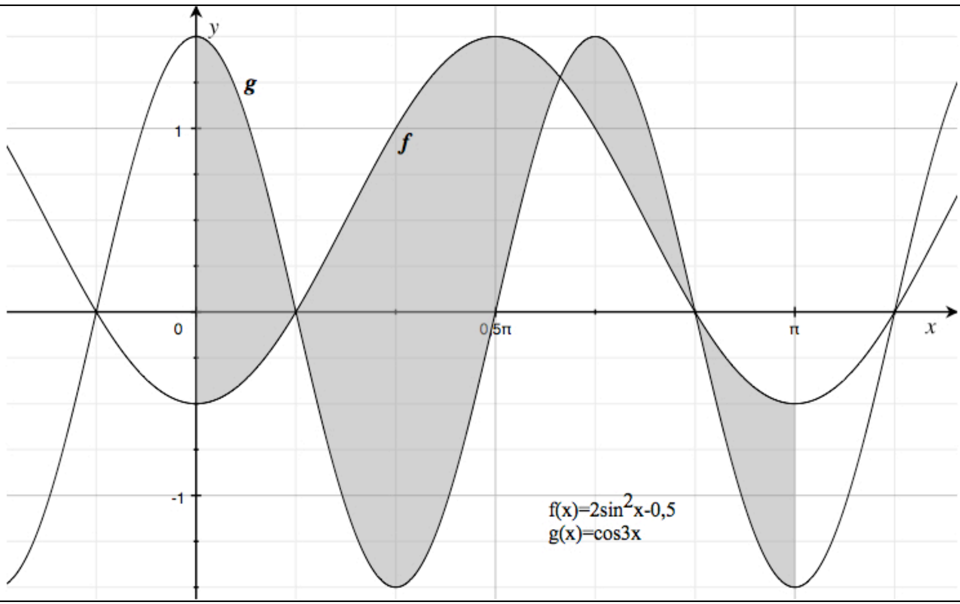
Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch. **/10**

[***Zur Kontrolle***: $\dfrac{r\,(r-1)\,(30-r)}{2\cdot\binom{30}{3}}$ ist der Term der Zielfunktion.]

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	b) $f_2(x)=\left(x^2-x-2\right)\cdot \mathrm{e}^x$ passt zum Verlauf des Drahtes, da f_2 als einzige Funktion durch A und B verläuft: $f_2(-1)=0$ und $f_2(2)=0$		2	
1.2	$f(-1)=0$ und $f(2)=0$, also verläuft f durch $A(-1\|0)$ und $B(2\|0)$.	2		
1.3	$f\,'(x)=\left(x-0{,}5\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}+\left(0{,}5x^2-0{,}5x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}=\underline{\underline{\left(0{,}25x^2+0{,}75x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}}}$		3	
1.4	$f\,'(x)=\left(0{,}25x^2+0{,}75x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$; $f\,'\left(x_E\right)=0$; $0{,}25x_E^2+0{,}75x_E-1=0$; $x_E^2+3x_E-4=0$;		2	
	$\underline{x_{E_1}=-4}$ und $\underline{x_{E_2}=1}$	2		
	$f\,''(x)=\left(0{,}125x^2+0{,}875x+0{,}25\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$		2	
	$f\,''(-4)\approx-0{,}17<0$, lokales Maximum; $f\,''(1)\approx 2{,}06>0$, lokales Minimum; $\underline{\underline{H(-4\|1{,}22)}}$; $\underline{\underline{T(1\|-1{,}65)}}$	3		
1.5	$f\,''(x)=\left(0{,}125x^2+0{,}875x+0{,}25\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$; $f\,''\left(x_W\right)=0$; $x_W^2+7x_W+2=0$;		2	
	$\underline{x_{W_1}\approx-0{,}30}$ und $\underline{x_{W_2}\approx-6{,}70}$; $\underline{\underline{W_1(-0{,}3\|-0{,}69)}}$ und $\underline{\underline{W_2(-6{,}7\|0{,}87)}}$	3		
1.6	$F\,'(x)=\left(2x-5\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}+\left(x^2-5x+8\right)\cdot 0{,}5\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}=$ $\left[\left(2x-5\right)+\left(0{,}5x^2-2{,}5x+4\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}=\left(0{,}5x^2-0{,}5x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}=\underline{f(x)}$ F ist Stammfunktion von f.		2	
	$A=\left\|\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right\|=\left\|F(2)-F(-1)\right\|\approx\left\|5{,}44-8{,}49\right\|=\underline{\underline{3{,}05}}$		3	
1.7	$f_k\,'(x)=\left(2x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}+\left(x^2-x-2\right)\cdot k\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}=$ $\left[\left(2x-1\right)+\left(k\cdot x^2-k\cdot x-2k\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}=\underline{\underline{\left[k\cdot x^2+\left(2-k\right)\cdot x-\left(2k+1\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}}}$			3
1.8	Winkel von 45°: $f_k\,'(-1)=-1$ $f_k\,'(-1)=\left[k-\left(2-k\right)-\left(2k+1\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-k}=-1$; $-3\cdot \mathrm{e}^{-k}=-1$; $\underline{\underline{k=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln(3)\approx 1{,}10}}$			5
	Summe (Aufgabe 1)	10	16	8
	Mögliche BE		34	

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	$f(-x)=f(x)$; f ist achsensymmetrisch.	1		
	Ableitungen: $f'(x)=-\frac{18x}{\left(x^2+3\right)^2}$; $f''(x)=\frac{54x^2-54}{\left(x^2+3\right)^3}$		2	
	Extremalpunkt: $f'(x_E)=0$; $x_E=0$; $f''(0)=-2<0$; $H(0 \mid 3)$	3		
	Wendepunkte: $f''(x_W)=0$; $x_{W_1}=-1$; $W_1(-1 \mid 2{,}25)$; $x_{W_2}=1$; $W_2(1 \mid 2{,}25)$	4		
2.2	$f(-4)=f(4)=\frac{9}{19}\approx 0{,}47$	1		
			3	
2.3	$A(x)=2x\cdot\frac{9}{x^2+3}=\frac{18x}{x^2+3}$			2
	$A'(x)=\frac{54-18x^2}{\left(x^2+3\right)}$; $A'(x_E)=0$; $x_{E_{1/2}}=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$ Die Breite des Rechtecks beträgt $2\sqrt{3}\approx 3{,}46$ und die Höhe 1,5.		4	
2.4	$t(x)=m\,x+n$ für $x_1=-1$: $t_1(x)=\frac{9}{8}x+\frac{27}{8}$ bzw. $t_1(x)=1{,}125x+3{,}375$		3	
	für $x_2=1$: $t_2(x)=-\frac{9}{8}x+\frac{27}{8}$ bzw. $t_2(x)=-1{,}125x+3{,}375$ (t_2 durch Berechnung oder Achsensymmetrie)		1	
	Zeichnung	1		
	Zwischensumme (Aufgabe 2)	10	13	2

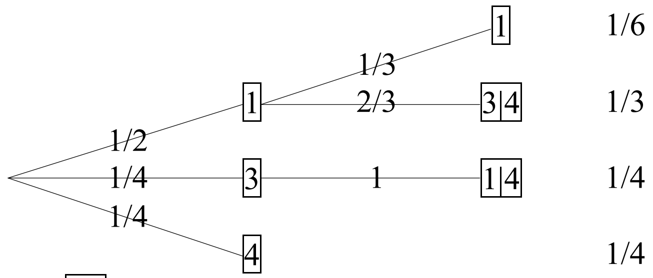
Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 2)	10	13	2
2.5	$p(x)=ax^2+b,\ p'(x)=2ax$ In $W_2(1 \mid 2{,}25)$ gelten $f(1)=p(1)$ und $f'(1)=p'(1)=2a$, also $-\frac{9}{8}=2a$, woraus $a=-\frac{9}{16}$ und $b=\frac{45}{16}$ folgen. $p(x)=-\frac{9}{16}x^2+\frac{45}{16}$ bzw. $p(x)=-0{,}5625x^2+2{,}8125$			4
	$A_{\text{Dreiecksspitze}}=\frac{2\cdot 1\cdot\left(t_2(0)-t_2(1)\right)}{2}=3{,}375-2{,}25=1{,}125$		1	
	$A_{\text{Parabelsegment}}=2\int_0^1\left(p(x)-2{,}25\right)\mathrm{d}x=2\left[-\frac{3}{16}x^3+\frac{9}{16}x\right]_0^1=\frac{3}{4}$		2	
	Der Flächeninhalt würde um 0,375 abnehmen.		1	
	Summe (Aufgabe 2)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

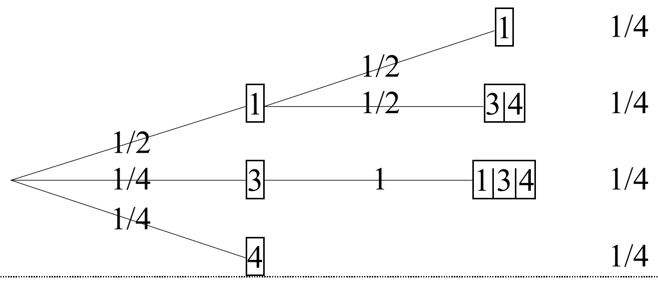
Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	$f: 2\sin^2 x_N - 0{,}5 = 0$; $\sin x_N = \pm 0{,}5$ ergibt in I: $x_{f,1} = \frac{\pi}{6}$ und $x_{f,2} = \frac{5\pi}{6}$ $g: 1{,}5\cos(3x_N) = 0$; $3x_N = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$ oder $= \frac{5\pi}{2}$; $x_{g,1} = \frac{\pi}{6}$, $x_{g,2} = \frac{\pi}{2}$ und $x_{g,3} = \frac{5\pi}{6}$		6	
3.2		5		
3.3	$f(x_S) = g(x_S)$; $1{,}5 - 2\cos^2 x_S = 6\cos^3 x_S - 4{,}5\cos x_S$ ergibt mit der Substitution $c := \cos x_S$ $6c^3 + 2c^2 - 4{,}5c - 1{,}5 = 0$.	2		
	Bekannt sind die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, d. h. $c_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Es kann also durch $(c - c_1)(c - c_2) = \left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(c + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (c^2 - 0{,}75)$ dividiert werden. $(6c^3 + 2c^2 - 4{,}5c - 1{,}5) : (c^2 - 0{,}75) = 6c + 2$ $6c + 2 = 0$ liefert als gesuchte dritte Schnittstelle $c_3 = -\frac{1}{3}$ und damit $x_3 \approx 1{,}91$.			6
	Zwischensumme (Aufgabe 3)	7	6	6

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 3)	7	6	6
3.4	$\int_0^{\pi}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x=\left[\left(x-0{,}5\sin(2x)-0{,}5x\right)-0{,}5\sin(3x)\right]_0^{\pi}=$ $\left[0{,}5x-0{,}5\sin(2x)-0{,}5\sin(3x)\right]_0^{\pi}=0{,}5\pi$		4	
	Da sich f und g in I mehrfach schneiden, ergibt das Integral nicht den Flächeninhalt, sondern die Summe der orientierten Flächenstücke.		1	
3.5	Abstand $d(x):=f(x)-g(x)=2\sin^2 x-0{,}5-1{,}5\cos(3x)$ Die Bedingungen werden durch Nachrechnen überprüft: 1.) $d'(x)=4\sin x\cos x+4{,}5\sin(3x)$ Mit $x_E=\cos^{-1}\left(\frac{-2+\sqrt{85}}{18}\right)$ folgt $d'(x_E)=4\sin x_E\cos x_E+4{,}5\sin(3x_E)=0$.		3	
	2.) $d''(x)=4\cos^2 x-4\sin^2 x+13{,}5\cos(3x)$ $d''(x_E)=4\left(\cos^2 x_E-\sin^2 x_E\right)+13{,}5\cos(3x_E)\approx-15{,}47<0$		3	
3.6	$g^*\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $k\cos(2\pi)=2\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-0{,}5$; $k=2\cdot0{,}75-0{,}5=1$	3		
	Summe (Aufgabe 3)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Z. B.: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear.	2		
	Durch A, B und C ist somit eine Ebene eindeutig festgelegt.	1		
4.2	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix};\ r,\ s \in \mathbb{R};\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\quad E: 4x - 3z = 9$		4	
4.3	Da $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 5$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, gibt es einen Punkt D mit den gewünschten Eigenschaften.	3		
4.4	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix};\ D(6 \mid -2 \mid 5),\ M(4{,}5 \mid 0{,}5 \mid 3)$		2	
4.5	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3k \\ 3+5k \\ 9{,}5+4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}$		1	
	Die rechte Seite der Geradengleichung von g wird in die Ebenengleichung von E eingesetzt: $4(0+3k) - 3(9{,}5+4k) = 9;\ -28{,}5 \neq 9$, also $g \parallel E,\ g \not\subset E$		2	
4.6	Da S die Spitze einer geraden Pyramide ist, liegt S auf der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ S ist der Schnittpunkt der Geraden g und h.	2		
	Das Gleichungssystem $\begin{array}{lcl} 4{,}5 + 4t &=& 0 + 3k \\ 0{,}5 &=& 3 + 5k \\ 3 - 3t &=& 9{,}5 + 4k \end{array}$ hat u. a. die Lösung $k = -0{,}5$, daher ist $S(-1{,}5 \mid 0{,}5 \mid 7{,}5)$ die gesuchte Pyramidenspitze.		3	
	$\cos(\angle ASC) = \dfrac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{SC}\right\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -2{,}5 \\ -6{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{68{,}75} \cdot \sqrt{68{,}75}} \approx 0{,}63637;\ \angle ASC \approx 50{,}48°$		2	
	Zwischensumme (Aufgabe 4)	8	14	0

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 4)	8	14	0
4.7	$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert^2 \cdot d\left(S;E\right)$,		1	
	wobei $d\left(S;\ E\right) = \left\vert \frac{4\cdot(-1{,}5)-3\cdot 7{,}5-9}{\sqrt{4^2+3^2}} \right\vert = 7{,}5\ (\text{cm})$		1	
	$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\cdot 25\cdot 7{,}5 = 62{,}5\ \ (\text{cm}^3)$		1	
	Das Volumen der Pyramide beträgt 62,5 cm³.	1		
4.8	$\sin\alpha = \frac{\left\vert\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n}_{xy}\right\vert}{\left\vert\overrightarrow{SM}\right\vert\cdot\left\vert\vec{n}_{xy}\right\vert} = \frac{\left\vert\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\vert}{5} = 0{,}6\,;\ \alpha\approx 36{,}87°$			3
	Die Achse SM muss noch um $52° - 36{,}9° = 15{,}1°$ angehoben werden.	1		
4.9	β sei der Winkel zwischen g und der x - y - Ebene. $\sin\beta = \frac{\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{50}} = \frac{4}{\sqrt{50}} \approx 0{,}5657\,;\ \beta\approx 34{,}45°$ Der Schatten mit der Länge l ist Basis eines Dreiecks. Ihm gegenüber liegt der Winkel $\gamma = 180° - 52° - 34{,}5° = 93{,}5°$. Der Sinussatz ergibt $l = \frac{2\ \sin 93{,}5°}{\sin 34{,}5°} \approx 3{,}52$. Der Schatten des Schattenstabes ist ca. 3,52 m lang.			3
	Summe (Aufgabe 4)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td rowspan="2">5.1</td><td>

Hinweis: 3|4 bedeutet 3 oder 4.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>$P(\{\text{Ein Zug genügt.}\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{\text{Zwei Züge benötigt}\}) = \frac{7}{12}$,
$P(\{\text{Mehr als zwei Züge benötigt}\}) = \frac{1}{6}$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>
<table>
<tr><td>g</td><td>$2T$</td><td>$-\frac{1}{2}T$</td><td>$-T$</td><td>Σ</td></tr>
<tr><td>$P(\{G=g\})$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{7}{12}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$g \cdot P(\{G=g\})$</td><td>$\frac{1}{2}T$</td><td>$-\frac{7}{24}T$</td><td>$-\frac{1}{6}T$</td><td>$\frac{1}{24}T$</td></tr>
</table>
</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5.3</td><td>
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$P(\{\text{Ein Zug genügt.}\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{\text{Zwei Züge benötigt}\}) = \frac{1}{2}$,
$P(\{\text{Mehr als zwei Züge benötigt}\}) = \frac{1}{4}$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>g</td><td>$2T$</td><td>$-\frac{1}{2}T$</td><td>$-T$</td><td>Σ</td></tr>
<tr><td>$P(\{G=g\})$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$g \cdot P(\{G=g\})$</td><td>$\frac{1}{2}T$</td><td>$-\frac{1}{4}T$</td><td>$-\frac{1}{4}T$</td><td>$0T$</td></tr>
</table>
</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Zwischensumme (Aufgabe 5)</td><td>7</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Übertrag (Aufgabe 5)</td><td>7</td><td>8</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.4</td><td>Die Anzahl der Auszahlungen des Hauptgewinns werde mit X bezeichnet.
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{4}$, $n = 10$ und $k = 2;3;4$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$P(\{2 \le X \le 4\}) = \binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8 + \binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7 + \binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx$
$0{,}677848$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.5</td><td>$P(\{\text{In den ersten vier Spielen kein Hauptgewinn, wohl aber im 5. Spiel}\}) =$
$\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{4} \approx 0{,}079102$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.6</td><td>$E(X) = 100\cdot\frac{1}{4} = 25$</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5.7</td><td>Liegen in der Urne r, $r = 0;\ldots;30$, rote Kugeln, so gilt
$P(\{\text{Zwei der drei gezogenen Kugeln sind rot}\}) = \dfrac{\binom{r}{2}\cdot\binom{30-r}{1}}{\binom{30}{3}} =$
$\frac{1}{8120}\cdot(r^2 - r)\cdot(30 - r) = \frac{1}{8120}(-r^3 + 31r^2 - 30r)$.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Der Term $f(r) := -r^3 + 31r^2 - 30r$, $r = 0;\ldots;30$, soll maximiert werden.
$f'(r) = -3r^2 + 62r - 30 = -3\left(r^2 - \frac{62}{3}r + 10\right)$ und $f''(r) = -6r + 62$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>$f'(r_E) = 0$ ergibt $r_{E_1} \approx 20{,}17$ ($r_{E_2} \approx 0{,}496$ entfällt).
Wegen $f''(20{,}17) \approx -59{,}02 < 0$ und $f(20) = 3800$, $f(21) = 3780$, $f(0) = 0$
und $f(30) = 0$ folgt: $r_{\max} = 20$, $P_{\max} = \frac{3800}{8120} \approx 0{,}4680$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe (Aufgabe 5)</td><td>10</td><td>17</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>