Berlin

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2011/2012

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	25. April 2012
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil; Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (Duden)
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Aus den fünf Aufgaben **müssen** Sie **drei** auswählen. Die **Aufgabe 1** (Exponentialfunktionen) ist eine **Pflichtaufgabe**. Sie **muss** von allen bearbeitet werden! Zwischen **Aufgabe 2** (Gebrochenrationale Funktionen) und **Aufgabe 3** (Trigonometrische Funktionen) müssen Sie **wählen**. Auch zwischen **Aufgabe 4** (Analytische Geometrie) und **Aufgabe 5** (Stochastik) müssen Sie **wählen**. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchstrichene Lösung zählt.**

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: _______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte

Aufgabe Nr.	**Soll %**	**Ist**	**Ist (Zweitkorrektur)**
1	34		
2 oder 3	33		
4 oder 5	33		
Summe:	100		
Notenpunkte	15	**__ /15 Punkten**	**__ /15 Punkten**
Maluspunkt	**-1**	**__ Punkt**	**__ Punkt**
Insgesamt		**__ Punkte**	**__ Punkte**
Datum, Unterschrift:			

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben seien die Funktionen f mit $f(x) = (1+4x)\cdot \mathrm{e}^{-1{,}5x}$ und g mit $g(x) = \mathrm{e}^{-1{,}5x}$, $D = \mathbb{R}$

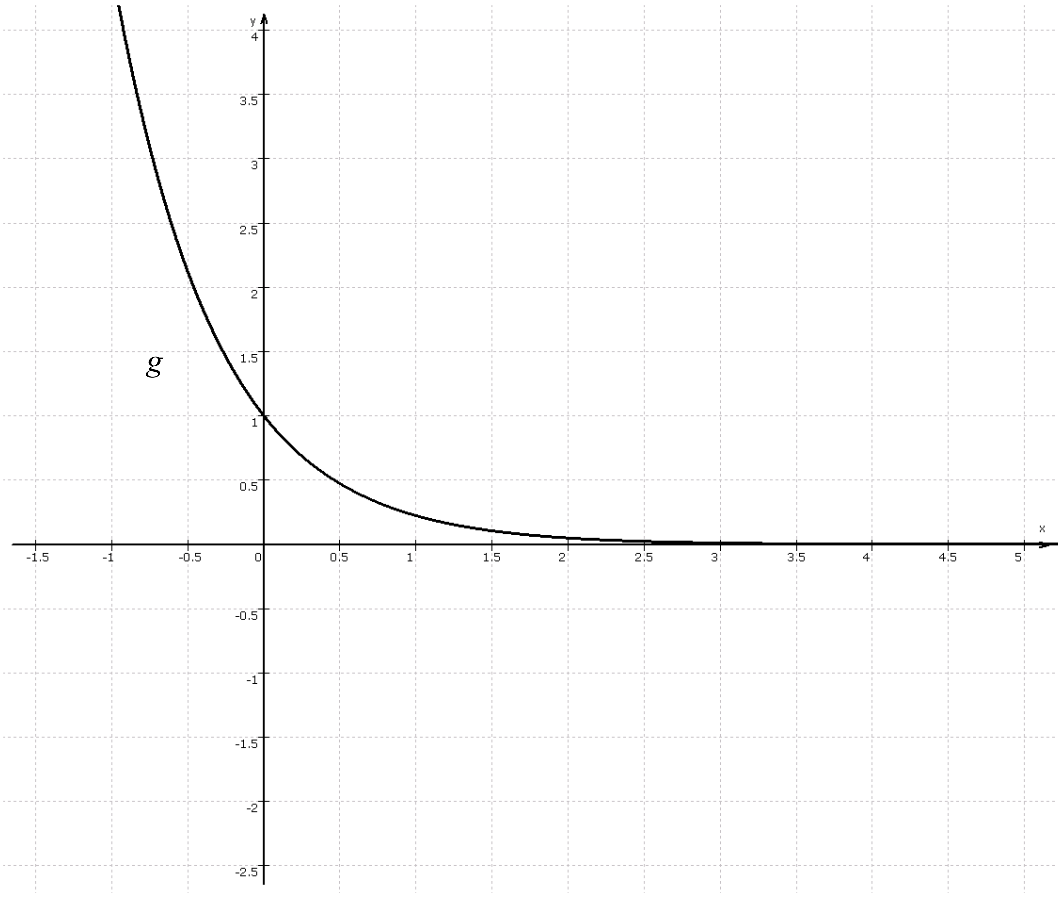
1.1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt von f mit der x - Achse sowie den Extrem- und den Wendepunkt.

Zeigen Sie dabei auch, dass $f'(x) = (2{,}5-6x)\cdot \mathrm{e}^{-1{,}5x}$ und $f''(x) = (9x-9{,}75)\cdot \mathrm{e}^{-1{,}5x}$. /11

[***Hinweis***: Auf den Nachweis mithilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.2 Zeichnen Sie den Graphen von f für $-0{,}5 \le x \le 3$ in das Koordinatensystem.

Berechnen Sie dazu nach Bedarf weitere Punkte von f.



/4

1.3 Berechnen Sie, an welcher Stelle im 1. Quadranten der senkrechte Abstand zwischen f und g maximal ist.

Berechnen Sie den maximalen Abstand. /4

[***Hinweis***: Auf den Nachweis mithilfe der 2. Ableitung kann verzichtet werden.]

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1 Exponentialfunktionen (Fortsetzung)

1.4 Zeigen Sie, dass $S(0|1)$ der einzige Schnittpunkt von f und g ist. **/3**

1.5 Die Tangenten an f und g im Schnittpunkt S schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Rotiert dieses Dreieck um die x-Achse, so entsteht ein Doppelkegel, d. h. zwei Kegel mit gemeinsamer Grundfläche. **/8**

Begründen Sie: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

Berechnen Sie das Volumen des Doppelkegels.

1.6 Durch die Spiegelung von g an der y-Achse entsteht der Graph einer Funktion h, der monoton steigend ist. **/4**

Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an.

Ab welchem x-Wert ist die Steigung größer als 10?

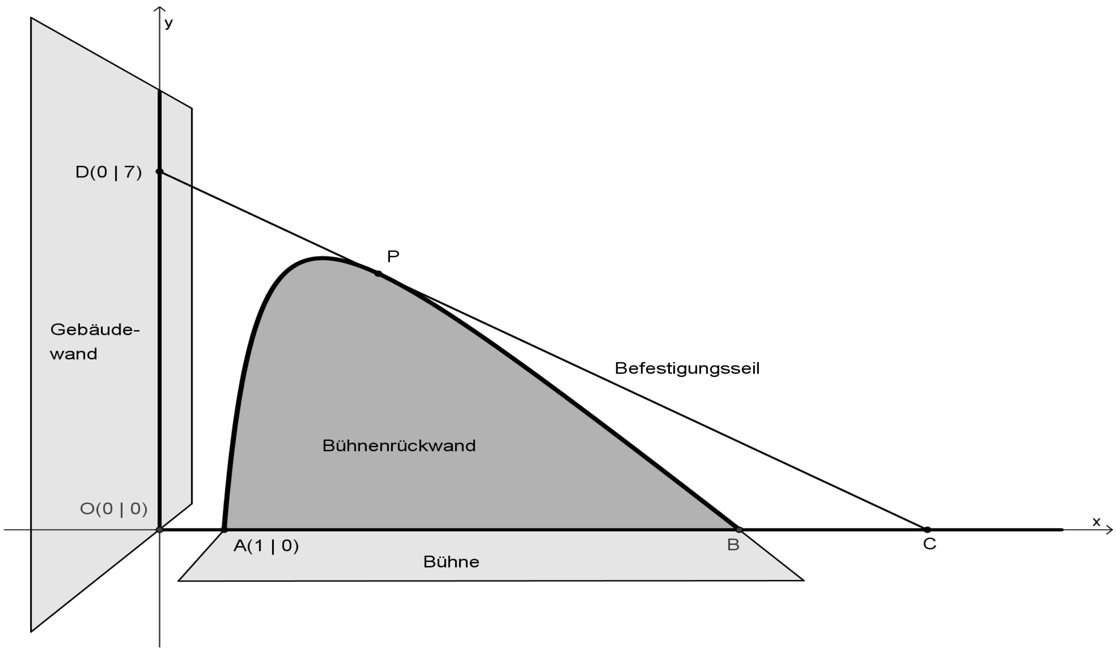
2 Gebrochen-rationale Funktionen /33

Für ein Openair-Konzert soll rechts neben einer Gebäudewand eine Bühne errichtet werden. Die Bühnenrückwand soll die Form eines asymmetrischen Bogens haben (siehe Abbildung).

In einem gedachten Koordinatensystem mit dem Ursprung $O(0|0)$ am unteren Ende der Gebäudewand wird der Bogen durch den im 1. Quadranten verlaufenden Teil der Funktion

$$f(x) = \frac{-x^3 + 9{,}1x^2 - 8{,}1}{x^2} = -x + 9{,}1 - \frac{8{,}1}{x^2}\ ,\ x \neq 0, \qquad (1 \text{ LE} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ m})$$

beschrieben.



(*Darstellung nicht maßstabsgetreu*)

2.1 Zeigen Sie, dass der linke Fußpunkt der Bühnenrückwand im Punkt $A(1|0)$ liegt. **/1**

2.2 Berechnen Sie die Breite der Bühne. **/9**

2.3 Weisen Sie nach, dass $f'(x) = \frac{-x^3 + 16{,}2}{x^3}$ bzw. $f'(x) = -1 + \frac{16{,}2}{x^3}$ gilt. **/3**

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes der Bühnenrückwand. **/5**

Fortsetzung auf der nächsten Seite

2 Gebrochen-rationale Funktionen (Fortsetzung)

2.5 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Bühnenrückwand. **/4**

[***Hinweis***: Eine mögliche Stammfunktion lautet: $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 9{,}1x + \frac{8{,}1}{x} - 7{,}1$]

Zur Sicherung der Bühnenkonstruktion wird ein Seil vom Punkt D in 7 m Höhe an der Gebäudewand zum Punkt C auf dem Erdboden gespannt. Das Seil berührt die Bühnenrückwand tangential im Punkt P.

2.6 Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P.

[***Zur Kontrolle***: $x_P = \sqrt{\frac{81}{7}}$] **/7**

2.7 Stellen Sie die Gleichung der Tangente t auf, die den Verlauf des Seils beschreibt.

Berechnen Sie, in welcher Entfernung vom rechten Bühnenrand B sich der Befestigungspunkt C befindet. **/4**

3 Trigonometrische Funktionen /33

Ein ruhender Mensch atmet in einer Minute zwölf Mal jeweils 3,2 Liter Luft ein bzw. aus.

Vereinfachend kann man diesen Atemvorgang, bei dem zur Zeit $t = 0$ s keine Luft in der Lunge sein soll, als harmonische Schwingung der Form $f(t) = a\cos(\omega t) + c$ ansehen (Luftvolumen $f(t)$ in Litern; Zeit t in Sekunden).

3.1 Geben Sie die Periodendauer, die Amplitude sowie die Funktionsgleichung von f an. /3

[**Zur Kontrolle**: $f(t) = 1{,}6 \cdot (1 - \cos(0{,}4\pi t))$]

3.2 Skizzieren Sie in das vorliegende Koordinatensystem (Diagramm 1) den Graphen von f, der den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge in der Zeit von 0 s bis 10 s beschreibt. /3

Diagramm 1

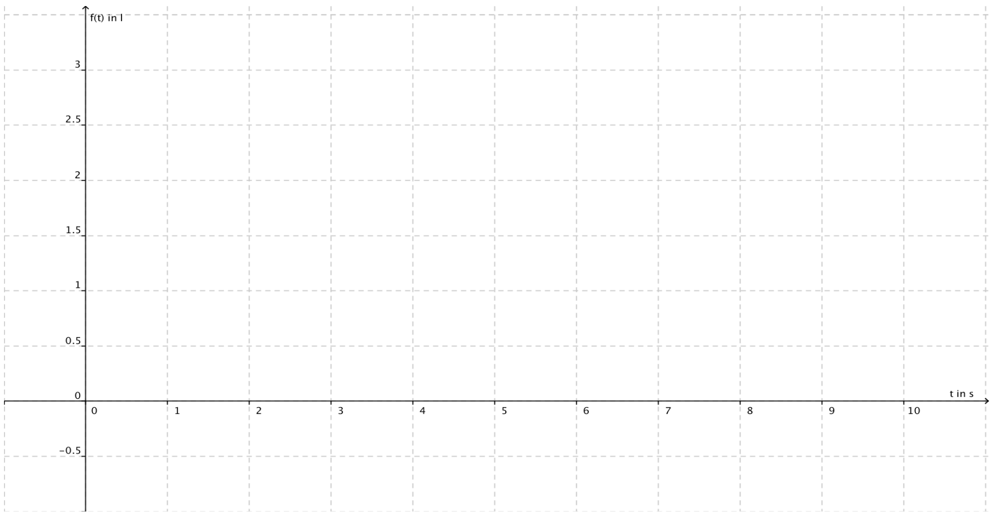
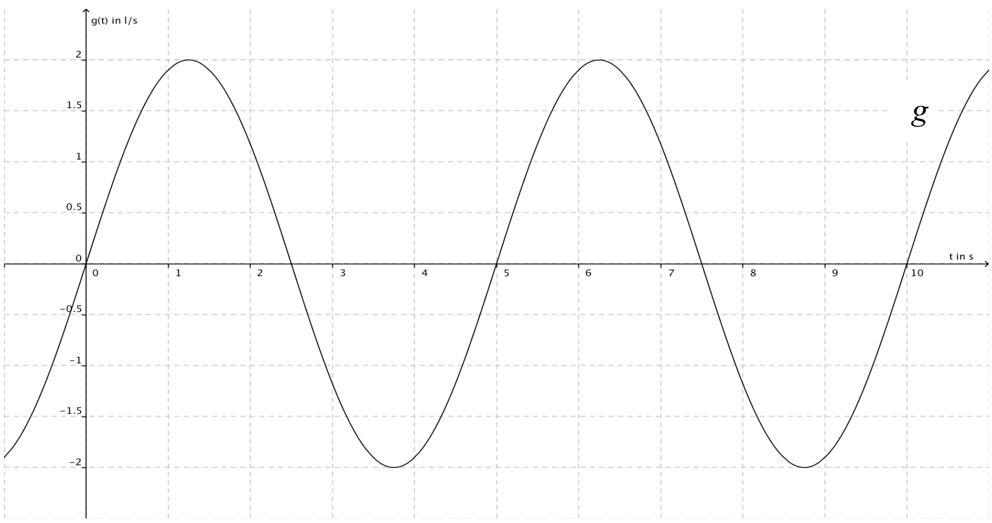


Diagramm 2



Fortsetzung auf der nächsten Seite

3 Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

3.3 Notieren Sie eine Vermutung über den mathematischen Zusammenhang von f und g (siehe Diagramm 2).

Begründen Sie Ihre Vermutung. **/6**

Bestimmen Sie aus dem Diagramm 2 näherungsweise die Funktionsgleichung für g und überprüfen Sie dann Ihre Vermutung durch Rechnung.

3.4 Berechnen Sie die Zeitpunkte, bei denen sich das Luftvolumen innerhalb der ersten erfassten Periode am stärksten ändert. **/7**

3.5 Berechnen Sie das durchschnittliche Luftvolumen zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 1,25$ s und $t_2 = 3,75$ s. **/6**

3.6 Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Erneut vereinfachend werde angenommen, dass diese minimale Luftmenge in der Lunge konstant 0,5 Liter sei. Der Atemvorgang laufe ansonsten wie bereits oben ermittelt ab, auch das maximale Luftvolumen bleibe bei 3,2 Litern. **/8**

Beschreiben Sie, wie sich diese Änderungen auf die Funktionsgraphen auswirken.

Stellen Sie die neuen Funktionsterme von f und g auf.

4 Analytische Geometrie /33

Gegeben seien drei Ebenen, beschrieben in Koordinatenform:

$$\begin{array}{llllllll} E: & 6x & + & 3y & + & 4z & = & 60 \\ F: & 8x & - & y & + & 2z & = & 30 \\ G: & 2x & + & y & & & = & 16 \end{array}$$

4.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte X, Y und Z der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen und geben Sie einen Normalenvektor zu der Ebene E an. /4

4.2 Die Schnittmenge von F und G ergibt eine Gerade g.

Bestimmen Sie die Geradengleichung von g. /6

[***Zur Kontrolle***: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$]

4.3 Berechnen Sie den Schnittpunkt S von g und E und den Schnittwinkel bei S. /7

[***Zur Kontrolle***: $S(4|8|3)$]

4.4 Die Gerade g werde senkrecht (in z-Richtung) auf die Ebene E projiziert.

Die entstehende Projektionsgerade heiße p.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung von p. /4

[***Zur Kontrolle***: $p: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$]

4.5 Berechnen Sie den Punkt M auf der Geraden p, der von $Z(0|0|15)$ minimale Entfernung hat. /6

[***Zur Kontrolle***: $M(6{,}4|3{,}2|3)$]

4.6 Der Punkt $K(2{,}4|11{,}2|11)$ liegt auf der Geraden g

und bildet die Spitze einer Pyramide über dem Dreieck ZMS. /6

Berechnen Sie deren Volumen.

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

In einer Urne liegen zwei schwarze und drei rote Kugeln. Es werden **ohne Zurücklegen** Kugeln gezogen. Die erste gezogene Kugel ist demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ schwarz.

5.1 Erstellen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm, mit dessen Hilfe Sie die folgenden drei Fragen beantworten können:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gezogene Kugel schwarz?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel schwarz, wenn die zweite gezogene Kugel schwarz war? /9

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel schwarz?

5.2 Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A = \{\text{Die erste gezogene Kugel ist schwarz.}\}$ und $B = \{\text{Die zweite gezogene Kugel ist schwarz.}\}$ stochastisch abhängig sind. /5

Es gilt: Werden **ohne Zurücklegen fünf** Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die $i.$ gezogene Kugel ($i = 1;\ldots;5$) schwarz ist, stets $p = 0{,}4$.

5.3 Handelt es sich beim Ziehen der Kugeln **ohne Zurücklegen** um eine Bernoulli-Kette? Begründen Sie Ihre Antwort. /2

Nun werden aus dieser Urne **mit Zurücklegen** Kugeln gezogen.

5.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der von den nächsten sieben gezogenen Kugeln drei schwarze sind. /3

5.5 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der unter den nächsten fünf gezogenen Kugeln genau zwei schwarze sind, während die sechste gezogene Kugel rot ist. /4

5.6 Was ist wahrscheinlicher? Zwei schwarze Kugeln unter den nächsten fünf oder vier schwarze Kugeln unter den nächsten zehn Kugeln? /4

Nun wird verallgemeinert: In einer Urne liegen K schwarze und $N - K$ rote Kugeln. Es werden **ohne Zurücklegen** N Kugeln gezogen.

Behauptung: Die $i.$ gezogene Kugel ($i \le N$) ist schwarz mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{K}{N}$.

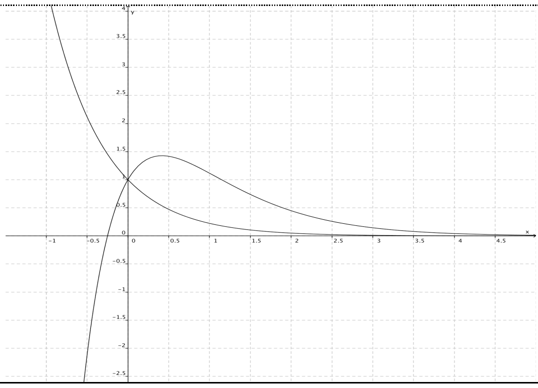
5.7 Zeigen Sie, dass diese Behauptung zutrifft, indem Sie wie folgt vorgehen:

Bestimmen Sie zuerst die **Anzahl der Möglichkeiten**, N Kugeln zu ziehen, wenn die K schwarzen und die $N - K$ roten Kugeln als ununterscheidbar angesehen werden und die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden wird, berücksichtigt wird.

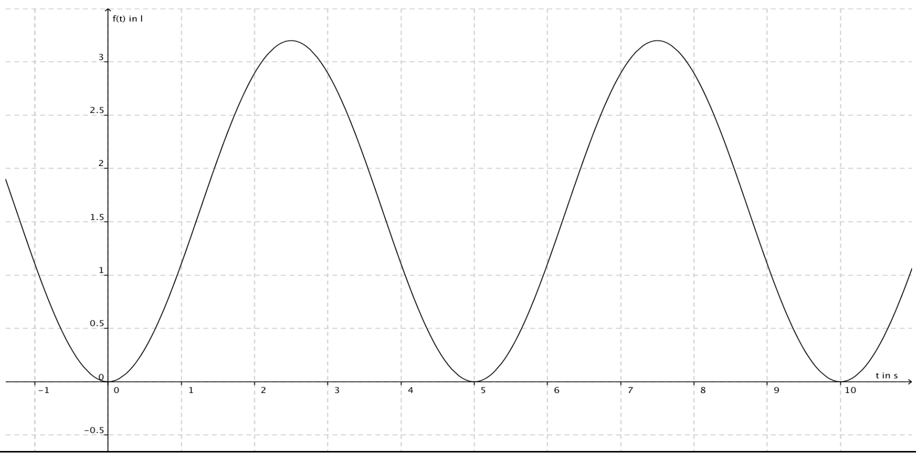
Bestimmen Sie dann die **Anzahl der Möglichkeiten**, N Kugeln zu ziehen, wenn die $i.$ gezogene Kugel schwarz ist. /6

[***Hinweis***: Auch hier wird die Reihenfolge berücksichtigt.]

Zeigen Sie zum Schluss, dass die **Wahrscheinlichkeit**, dass die $i.$ gezogene Kugel schwarz ist, gleich $\frac{K}{N}$ ist.

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	$f(x_N)=0$; $1+4x_N=0$; $x_N=-0{,}25$; $S_x(-0{,}25 \mid 0)$	2		
	Ableitungen: $f'(x)=4\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}+(1+4x)(-1{,}5)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}=(2{,}5-6x)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}$ $f''(x)=-6\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}+(2{,}5-6x)(-1{,}5)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}=(9x-9{,}75)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}$		2	
	Extremalpunkt: $f'(x_E)=0$; $2{,}5-6x_E=0$; $x_E=\frac{5}{12}$; $f''\left(\frac{5}{12}\right)\approx-3{,}211<0$; $H\left(\frac{5}{12} \middle\vert 1{,}43\right)$		4	
	Wendepunkt: $f''(x_W)=0$; $9x_W-9{,}75=0$; $x_W\approx1{,}08$; $W(1{,}08 \mid 1{,}05)$		3	
1.2	$f(-0{,}5)\approx-2{,}12$; $f(3)\approx0{,}14$	1		
			3	
1.3	$d(x)=f(x)-g(x)$; $d(x)=(1+4x)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}-\mathrm{e}^{-1{,}5x}=4x\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}$, $d'(x)=(4-6x)\ \mathrm{e}^{-1{,}5x}$; $d'(x_E)=0$; $x_E=\frac{2}{3}$; $d\left(\frac{2}{3}\right)\approx0{,}98$			4
1.4	$f(x_S)=g(x_S)$; $1+4x_S=1$; $x_S=0$; $S(0 \mid 1)$	3		
1.5	Die Tangenten liegen nicht senkrecht zur x-Achse. Da $f'(0)=2{,}5$ und $g'(0)=-1{,}5$, gilt $f'(0)\cdot g'(0)\neq-1$. Die Tangenten stehen nicht senkrecht zueinander. Das Dreieck ist also nicht rechtwinklig.		2	
	Gleichungen der Tangenten in S: $t_f(x)=2{,}5x+1$; $t_g(x)=-1{,}5x+1$	2		
	Nullstellen sind $x_{N_f}=-\frac{2}{5}$ und $x_{N_g}=\frac{2}{3}$.	2		
	$V_{\text{Doppelkegel}}=\frac{1}{3}\pi r^2\left(\lvert x_{N_f}\rvert+x_{N_g}\right)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)\approx1{,}117$		2	
1.6	$h(x)=\mathrm{e}^{1{,}5x}$; $h'(x)=1{,}5\ \mathrm{e}^{1{,}5x}$; $1{,}5\ \mathrm{e}^{1{,}5x}>10$; $x>1{,}265$.			4
	Summe (Aufgabe 1)	10	16	8
	Mögliche BE	34		

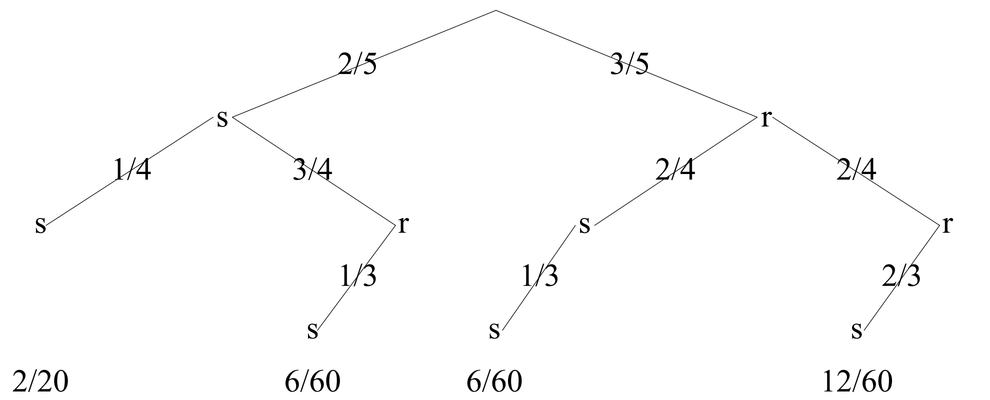
Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	$f(1) = -1 + 9{,}1 - \frac{8{,}1}{1^2} = 0$	1		
2.2	Breite: Berechnung der zweiten Nullstelle: $f(x_N) = 0$		1	
	$\frac{-x_N^{\ 3} + 9{,}1x_N^{\ 2} - 8{,}1}{x_N^{\ 2}} = 0$; $x_N^3 - 9{,}1x_N^2 + 8{,}1 = 0$		2	
	$(x^3 - 9{,}1x^2 + 8{,}1) : (x-1) = x^2 - 8{,}1x - 8{,}1$		4	
	$\underline{x_{N_2} = 9}$; ($x_{N_3} = -0{,}9 < 0$ entfällt.)	1		
	Breite: $b = 9 - 1 = \underline{\underline{8}}$ Die Bühne ist 8 m breit.	1		
2.3	$f'(x) = \frac{(-3x^2 + 18{,}2x)\cdot x^2 - (-x^3 + 9{,}1x^2 - 8{,}1)\cdot 2x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{-x^3 + 16{,}2}{x^3}}}$ oder: $f'(x) = -1 + 16{,}2x^{-3} = \underline{\underline{-1 + \frac{16{,}2}{x^3}}}$		3	
2.4	$f'(x_E) = \frac{-x_E^3 + 16{,}2}{x_E^3} = 0$; $x_E^3 = 16{,}2$; $\underline{x_E \approx 2{,}53}$	2		
	$f''(x) = -48{,}6x^{-4} = \frac{-48{,}6}{x^4}$; $f''(2{,}53) \approx -1{,}19 < 0$ lokales Maximum		2	
	$f(2{,}53) \approx 5{,}30$ $\underline{\underline{H(2{,}53 \mid 5{,}3)}}$	1		
2.5	$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 9{,}1x + 8{,}1x^{-1} = -\frac{1}{2}x^2 + 9{,}1x + \frac{8{,}1}{x}$		2	
	$A = \int_1^9 f(x)\,dx = F(9) - F(1) = 42{,}3 - 16{,}7 = \underline{\underline{25{,}6}}$ Der Flächeninhalt beträgt 25,6 m².	2		
2.6	Für den Berührpunkt $P(x_P \mid y_P)$ gilt $f'(x_P) = \frac{y_P - 7}{x_P - 0}$, also $x_P \cdot f'(x_P) = y_P - 7$. Es folgt $-x_P + \frac{16{,}2}{x_P^2} = -x_P + 2{,}1 - \frac{8{,}1}{x_P^2}$, also $x_P^2 = \frac{24{,}3}{2{,}1} = \frac{81}{7}$ und daher $\underline{x_P = \sqrt{\frac{81}{7}} \approx 3{,}40}$ (negative Lösung entfällt).			6
	$f(3{,}40) \approx 5{,}00$; $\underline{\underline{P(3{,}4 \mid 5{,}0)}}$	1		
2.7	$m_t = f'(3{,}40) \approx -0{,}59$; $\underline{\underline{t(x) = -0{,}59x + 7}}$		2	
	$-0{,}59x_C + 7 = 0$; $x_C \approx 11{,}86$		1	
	Antwort: Der Befestigungspunkt C befindet sich 2,86 m rechts der Bühne.	1		
	Summe (Aufgabe 2)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Periode: $\frac{60\text{ s}}{12}=5\text{ s}$	1		
	Amplitude: 1,6 l	1		
	$f\left(t\right)=-1{,}6\,\cos\left(0{,}4\pi t\right)+1{,}6=1{,}6\cdot\left(1-\cos\left(0{,}4\pi t\right)\right)$	1		
3.2		3		
3.3	Vermutung: g ist die Ableitungsfunktion von f und gibt die momentane Änderungsrate an.		2	
	Begründung z. B.: An den Extremstellen von f liegen die Nullstellen von g, bei negativen Anstiegen von f liegen negative Funktionswerte von g, an den (vermutlichen) Wendepunkten von f liegen die Extrempunkte von g.		2	
	$g\left(t\right)\approx 2\,\sin\left(0{,}4\pi t\right)$; $f'\left(t\right)=0{,}64\pi\sin\left(0{,}4\pi t\right)\approx g\left(t\right)$		2	
3.4	$f''\left(t\right)=0{,}256\pi^2\cos\left(0{,}4\pi t\right)$		1	
	$f'''\left(t\right)=-0{,}1024\pi^3\sin\left(0{,}4\pi t\right)$		1	
	$f''\left(t_W\right)=0$; $0{,}4\pi t_W=\frac{\pi}{2}\mid\frac{3\pi}{2}$; $t_{W_1}=\frac{5}{4}$, $t_{W_2}=\frac{15}{4}$		3	
	$f'''\left(\frac{5}{4}\right)=-0{,}1024\pi^3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0{,}1024\pi^3\approx-3{,}175$ $f'''\left(\frac{15}{4}\right)=-0{,}1024\pi^3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0{,}1024\pi^3\approx 3{,}175$ Daher sind $\frac{5}{4}$ und $\frac{15}{4}$ Wendestellen.		2	
	Zwischensumme (Aufgabe 3)	6	13	0

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 3)	6	13	0
3.5	Für das durchschnittliche Luftvolumen gilt: $f_{\varnothing} = \frac{1}{3{,}75-1{,}25}\int_{1{,}25}^{3{,}75} f(t)\,\mathrm{d}t =$	2		
	$\frac{1{,}6}{2{,}5}\left[\left(t-\frac{1}{0{,}4\pi}\sin(0{,}4\pi t)\right)\right]_{1{,}25}^{3{,}75} = 0{,}64\left(2{,}5+\frac{2}{0{,}4\pi}\right)\approx 2{,}619$		3	
	Das durchschnittliche Luftvolumen beträgt in diesem Intervall rund 2,6 Liter.		1	
3.6	f hat dieselben Extremstellen wie zuvor und auch die Maxima bleiben unverändert (3,2 l). Die Minima jedoch sind nun positiv (0,5 l). Daraus ergibt sich, dass der Betrag des Anstiegs zwischen den Extremstellen kleiner wird, der Graph verläuft flacher. f besitzt keine Nullstellen mehr. Bei g ändern sich die Nullstellen nicht, aber die Beträge der extremalen Funktionswerte werden kleiner. Bei f muss der Streckungsfaktor geändert werden, damit der Anstieg der Kurve flacher wird, und es muss ein Summand angefügt werden, damit die Schnittstelle auf der y-Achse nach „oben“ verschoben wird.	2		
	$f_{\text{neu}}(t) = 1{,}6a\left(1-\cos(0{,}4\pi t)\right)+b$ mit zu bestimmenden a und b $f_{\text{neu}}(2{,}5) = 1{,}6a\left(1-\cos(0{,}4\pi\cdot 2{,}5)\right)+0{,}5 = 3{,}2$; $a = \frac{2{,}7}{3{,}2} = 0{,}84375$; $f_{\text{neu}}(t) = 1{,}35\left(1-\cos(0{,}4\pi t)\right)+0{,}5$ Bei der Funktion g muss nur der Streckungsfaktor geändert werden: $g_{\text{neu}}(t) = 0{,}54\pi\sin(0{,}4\pi t)$			6
	Summe (Aufgabe 3)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	$X(10\mid 0\mid 0)$, $Y(0\mid 20\mid 0)$, $Z(0\mid 0\mid 15)$	3		
	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	1		
4.2	Das Gleichungssystem aus F und G besitzt z. B. die Lösung: x ist beliebig, $y = 16 - 2x$ und $z = 23 - 5x$;		5	
	$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$		1	
4.3	Die rechte Seite der Geradengleichung von g wird in die Gleichung von E eingesetzt: $6r + 3(16 - 2r) + 4(23 - 5r) = 60$ hat die Lösung $r = 4$, d. h. $S(4\mid 8\mid 3)$.	4		
	$\sin\alpha = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{20}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{30}} \approx 0{,}4672;\ \alpha \approx 27{,}87°$		3	
4.4	Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \zeta \end{pmatrix}$ von p muss senkrecht zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ von E stehen, woraus $\zeta = 0$ folgt. $p\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$		4	
4.5	Der kürzeste Abstand ergibt sich, wenn der Verbindungsvektor $\overrightarrow{ZM}$ orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden p ist. $\begin{pmatrix} 4+s \\ 8-2s \\ 3-15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ergibt $s = 2{,}4$, also $M(6{,}4\mid 3{,}2\mid 3)$.			6
	Zwischensumme (Aufgabe 4)	8	13	6

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 4)	8	13	6
4.6	$A_{ZMS} = \frac{1}{2}\sqrt{6{,}4^2+3{,}2^2+12^2}\cdot\sqrt{2{,}4^2+4{,}8^2+0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{195{,}2}\cdot\sqrt{28{,}8}$	2		
	Die Pyramidenhöhe h ist der Abstand von K zur Ebene E. $h = \frac{(6\cdot 2{,}4+3\cdot 11{,}2+4\cdot 11)-60}{\sqrt{6^2+4^2+3^2}} = \frac{32}{\sqrt{61}}$		2	
	$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{195{,}2}\cdot\sqrt{28{,}8}}{2}\cdot\frac{32}{\sqrt{61}} = \frac{16}{3}\sqrt{92{,}16} = \frac{16\cdot 9{,}6}{3} = 51{,}2$		2	
	Summe (Aufgabe 4)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
5.1		6		
	$P\left(\{\text{2. Kugel ist schwarz.}\}\right) = P\left(\{\text{ss,rs}\}\right) = \frac{2+6}{20} = 0{,}4$ $P_{\text{2. Kugel ist schwarz.}}\left(\{\text{3. Kugel ist schwarz.}\}\right) =$ $\frac{P\left(\{\text{2. und 3. Kugel sind schwarz.}\}\right)}{P\left(\{\text{2. Kugel ist schwarz.}\}\right)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = 0{,}25$ $P\left(\{\text{3. Kugel ist schwarz.}\}\right) = P\left(\{\text{srs,rss,rrs}\}\right) = \frac{6+6+12}{60} = 0{,}4$	3		
5.2	Es gelten $P\left(\{\text{1. Kugel ist schwarz.}\}\right) = P\left(\{\text{2. Kugel ist schwarz.}\}\right) = 0{,}4$, aber $P\left(\{\text{1. und 2. Kugel sind schwarz.}\}\right) = \frac{2}{20} = 0{,}1$ und daher $P\left(\{\text{1. und 2. Kugel sind schwarz.}\}\right) \neq$ $P\left(\{\text{1. Kugel ist schwarz.}\}\right) \cdot P\left(\{\text{2. Kugel ist schwarz.}\}\right)$, also sind die Ereignisse stochastisch abhängig.		5	
5.3	Es handelt sich nicht um eine Bernoulli-Kette, da die entsprechenden Zweigwahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm nicht konstant sind.		2	
5.4	Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}4$; $n = 7$ und hier $k = 3$.		2	
	$P\left(\{X = 3\}\right) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}2903$	1		
	Zwischensumme (Aufgabe 5)	10	9	0

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 5)	10	9	0
5.5	Mit der Wahrscheinlichkeit $\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^3$ sind unter den nächsten fünf Kugeln genau zwei schwarze, die sechste Kugel ist mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}6$ rot, also ist $\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}6\approx 0{,}2074$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.		4	
5.6	$P(\{\text{zwei schwarze unter den nächsten fünf}\})=\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^3=0{,}3456$, $P(\{\text{vier schwarze unter den nächsten zehn}\})=\binom{10}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^6\approx 0{,}2508$, ersteres ist daher wahrscheinlicher.		4	
5.7	Es gibt $N!$ Möglichkeiten, aus einer Urne mit N unterscheidbaren Kugeln N Kugeln zu ziehen, wenn die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, berücksichtigt wird. Da die K schwarzen Kugeln und die $N-K$ roten Kugeln ununterscheidbar sind, gibt es $\frac{N!}{K!\,(N-K)!}=\binom{N}{K}$ Möglichkeiten. Wenn die $i.$ gezogene Kugel schwarz ist, dann gibt es (Begründung wie oben) $\binom{N-1}{K-1}$ Möglichkeiten, die verbleibenden $K-1$ schwarzen Kugeln auf die verbleibenden $N-1$ Plätze zu verteilen. Es folgt: $P(\{\text{Die } i. \text{ gezogene Kugel ist schwarz.}\})=$ $\frac{\binom{N-1}{K-1}}{\binom{N}{K}}=\frac{\frac{(N-1)!}{(K-1)!\,(N-K)!}}{\frac{N!}{K!\,(N-K)!}}=\frac{K}{N}$			6
	Summe (Aufgabe 5)	10	17	6
	Mögliche BE		33	