

**Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2020/2021**

Fach	Mathematik (A)
<h1>Nur für die Lehrkraft</h1>	
Prüfungstag	06. Mai 2021
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmiereteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.
Erwartungshorizonte	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.	Soll
1	34
2	33
3	33
Summe¹:	Je nach Wahl 67 oder 66

¹ Jeder Prüfling bearbeitet nur zwei Aufgaben.

1 Exponentialfunktionen

/34

Die Wassermenge in einem Stausee verändert sich, weil Wasser zufließt und abfließt. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die in einem Monat zugelaufene Wassermenge kann durch die Zulauffunktion z mit

$$z(x) = (0,01x^2 - x + 25)e^{0,05x}$$

beschrieben werden.

Dabei gibt x die Anzahl der Monate nach Beobachtungsbeginn an und $z(x)$ die in dem Monat x zugelaufene Wassermenge in Tausend Kubikmetern. Betrachtet wird für x das Intervall $[0 | 60]$.

Geben Sie alle Ergebnisse mit 2 Nachkommastellen an.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion z . **/6**
Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle im Sachzusammenhang.

1.2 Zeigen Sie, dass **/3**
 $z'(x) = (0,0005x^2 - 0,03x + 0,25)e^{0,05x}$ die 1. Ableitung der Funktion z ist.

1.3 Bestimmen Sie, in welchem Monat im betrachteten Intervall die zulaufende Wassermenge maximal wird. **/8**
Geben Sie an, welche Wassermenge zu diesem Zeitpunkt zufließt.
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden:]
 $z''(x) = (0,000025x^2 - 0,0005x - 0,0175)e^{0,05x}$.

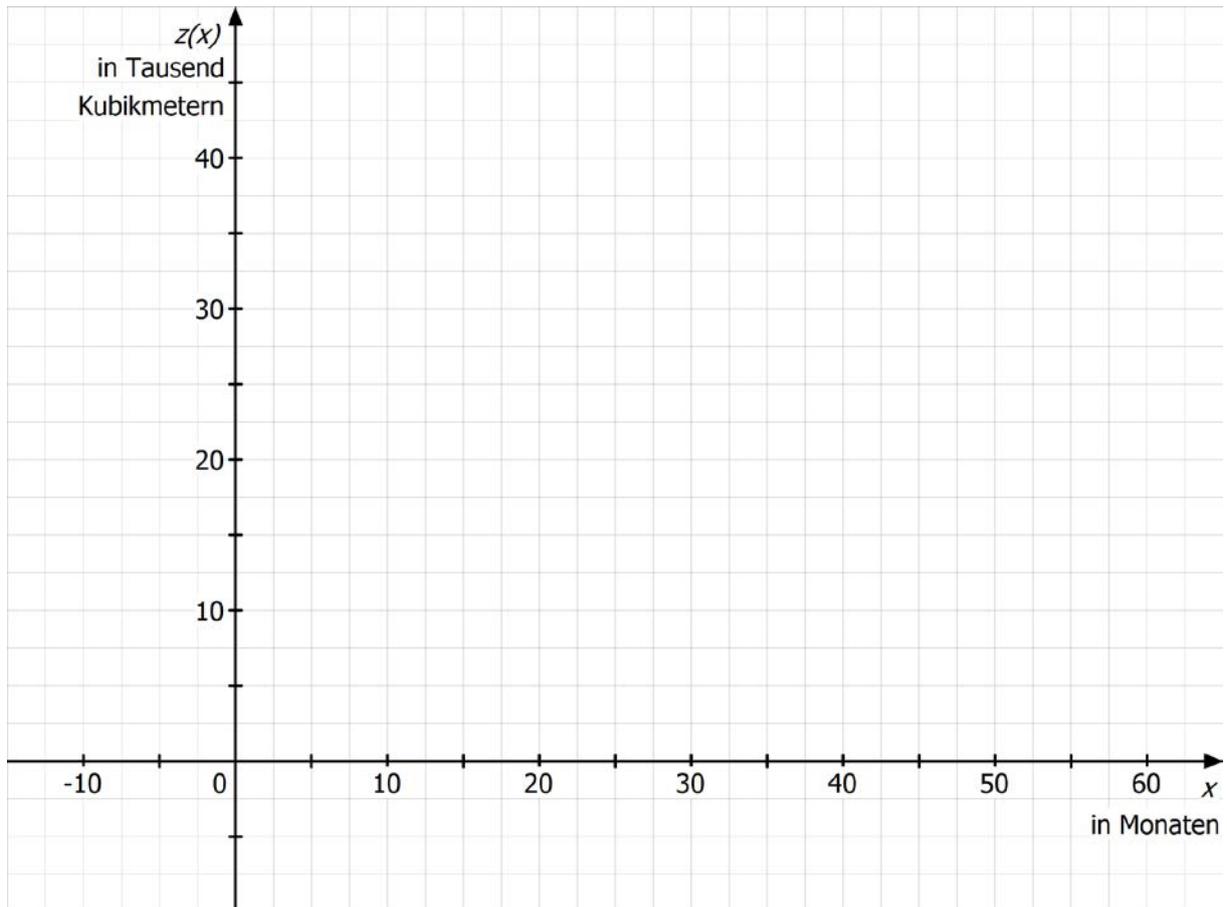
1.4 Für $10 < x < 50$ nimmt der Zulauf ab. **/5**
Bestimmen Sie, in welchem Monat der Zulauf am stärksten abnimmt.
[Hinweis: Auf einen Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.5 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von z im Intervall $[0 | 60]$ mit Hilfe Ihrer Ergebnisse sowie der nachfolgenden Wertetabelle in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**. **/5**

x	0	10	20	30	40	50	60
z(x)					7,39		20,09

1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $Z(x) = (0,2x^2 - 28x + 1060)e^{0,05x}$ eine mögliche Stammfunktion von $z(x)$ ist. **/7**
Berechnen Sie die Wassermenge, die innerhalb des ersten Jahres insgesamt in den Stausee fließt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5

2 Gebrochenrationale Funktion /33

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + 8}{2x + 2}$.

Der Graph der Funktion ist G_f .

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f eine Polstelle besitzt. /4
 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Polstelle.
 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

2.2 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den /2
 Koordinatenachsen.

2.3 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion f im Unendlichen. /5
 Bestimmen Sie die Gleichung a der Asymptote von G_f .

2.4 Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 16}{(2x + 2)^2}$ die Gleichung der ersten Ableitung von f /3
 ist.

2.5 Bestimmen Sie rechnerisch die Lage und Art der Extrempunkte der Funktion f . /6
 [Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden: $f''(x) = \frac{72}{(2x + 2)^3}$.]

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /6

x	-8	-6	-3	-2	1	4	6	8
$f(x)$	-5,1		-4,3		2,3		3,1	

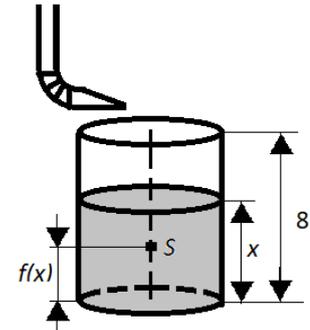
Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f im Intervall $-8 \leq x \leq 8$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Zeichnen Sie auch die Asymptote a ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Im Folgenden soll nun der Sachzusammenhang betrachtet werden:

Eine Regentonne hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes S von der Tonne und dem darin befindlichen Regenwasser hängt von der Füllhöhe x des Wassers über dem Boden der Tonne ab. Ist die Regentonne vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe $x = 8$ dm.

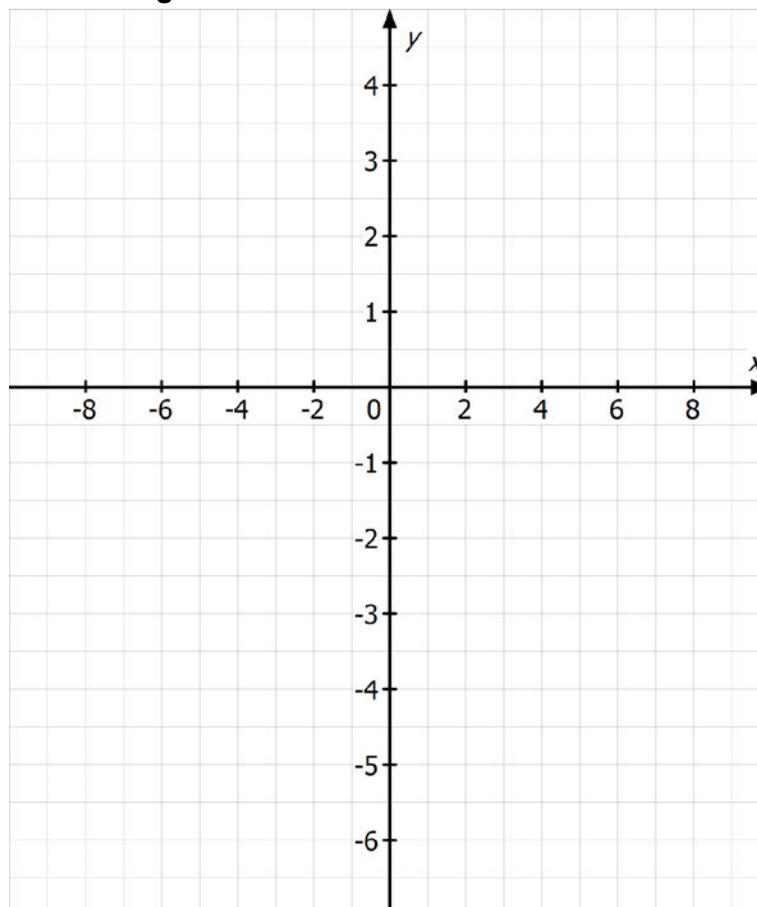


Abbildung

Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 8$ die Höhe des Schwerpunktes S über dem Boden in Dezimetern an. Dabei ist x die Füllhöhe in Dezimetern (siehe Abbildung).

- 2.7 Vergleichen Sie $f(0)$ und $f(8)$. Interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang. /2
- 2.8 Die anfänglich leere Regentonne füllt sich langsam mit Regenwasser, bis die maximale Füllhöhe von 8 dm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe Ihres Graphen G_f die Bewegung des Schwerpunktes S während des Füllvorgangs. Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Punktes $P(2|2)$. /2
- 2.9 Ermitteln Sie rechnerisch den Bereich der Füllhöhe x , bei der der Schwerpunkt S höchstens 2,4 dm hoch ist. /3

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6



3 Analytische Geometrie

/33

Für ein Kinderfest wird auf einem Hang ein Bereich zwischen drei Punkten abgesteckt. In einem Koordinatensystem haben diese Punkte die Koordinaten $A(0|0|2,7)$, $B(60|70|4,2)$ und $C(-30|90|4,7)$. Die Punkte A , B und C liegen in der Ebene E .

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

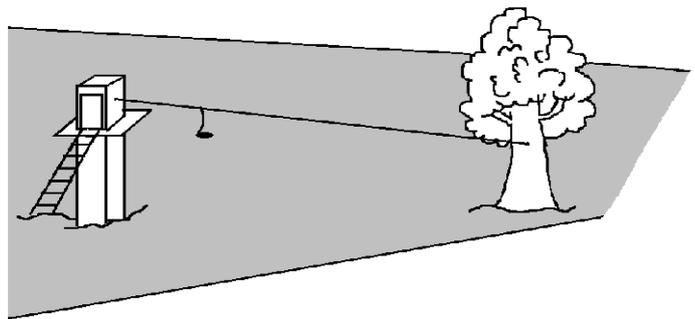
- 3.1** Stellen Sie für die Ebene E sowohl eine Gleichung in Parameterform als auch eine Gleichung in Koordinatenform auf. /6

[Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $E: 5x - 165y + 7500z = 20250$]

- 3.2** Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC annähernd gleichschenkelig ist. /5

Auf dem Hang wird eine Seilrutsche für Kinder aufgebaut (siehe Abbildung). Das dafür benötigte Stahlseil wird zwischen einem Kletterturm und einem Baum in den Punkten $P_K(42|74|7,4)$ und $P_B(12|64|5,2)$ befestigt.

[Hinweis: Das gespannte Seil kann als Gerade betrachtet werden.]



Abbildung

- 3.3** Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Stahlseil parallel zur Ebene E verläuft. /8

Ermitteln Sie den Winkel α , den das Stahlseil gegenüber der x - y -Ebene besitzt.

Geben Sie auch das daraus resultierende Gefälle des Stahlseiles gegenüber der x - y -Ebene in Prozent an.

- 3.4** Um einen Aufprall an dem Baum zu verhindern, befindet sich am Stahlseil eine Abbremsvorrichtung im Punkt $S(18|66|5,64)$. /4

Berechnen Sie den Abstand des Punktes S zur Ebene E .

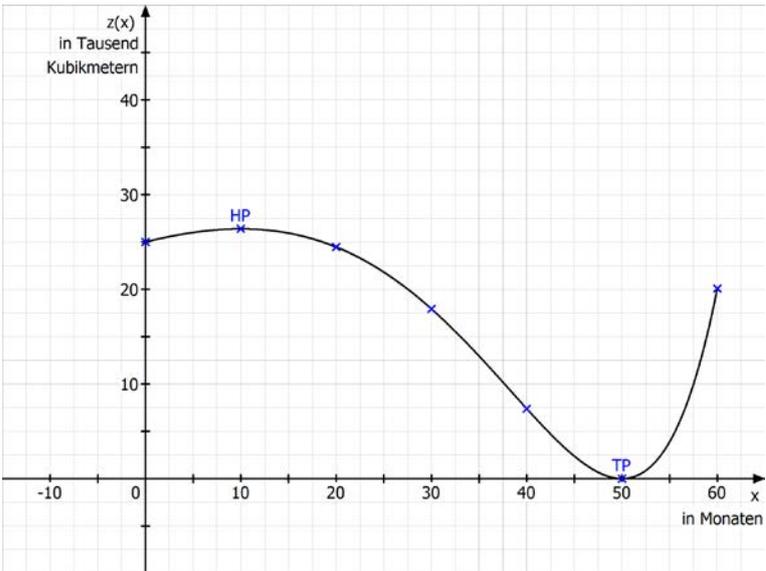
Der Veranstalter des Kinderfestes plant, im Punkt $M(27|69|4,0)$ einen 8 m hohen Mast mit seinem Logo aufzustellen. Der Mast soll senkrecht zur x - y -Ebene stehen.

- 3.5** Untersuchen Sie, ob sich der Mast und die Seilrutsche berühren würden. /5

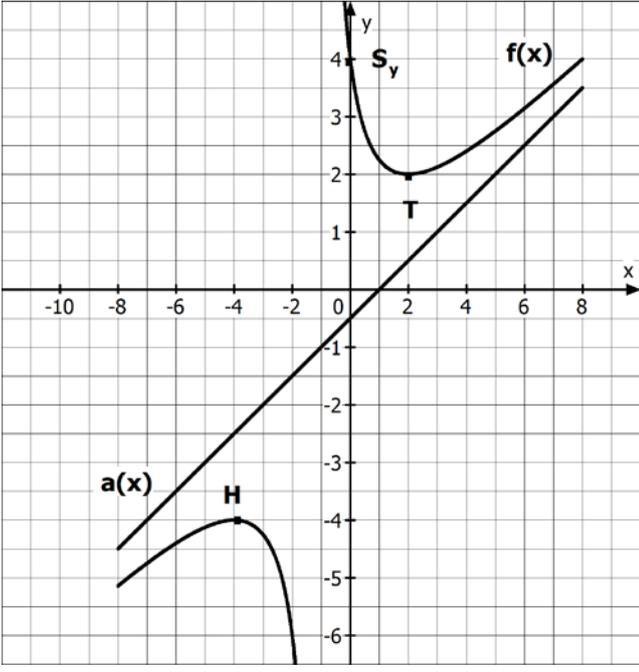
- 3.6** Zeigen Sie, dass der Punkt M nicht in der Ebene E liegt. /5

Untersuchen Sie, ob der Punkt M unterhalb oder oberhalb der Ebene E liegt.

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	$z(x) = 0$ $(0,01x^2 - x + 25) \underbrace{e^{0,05x}}_{\text{wird nie Null}} = 0$ $0,01x^2 - x + 25 = 0$ $x^2 - 100x + 2500 = 0$ $x = 50$ <p>Im 50. Monat nach Beginn der Beobachtung läuft kein Wasser im Stausee hinzu.</p>	4		2
1.2	$z'(x) = (0,02x - 1)e^{0,05x} + 0,05(0,01x^2 - x + 25)e^{0,05x}$ $= (0,0005x^2 - 0,03x + 0,25)e^{0,05x}$		3	
1.3	$z'(x) = 0$ $0 = (0,0005x^2 - 0,03x + 0,25) \underbrace{e^{0,05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0 = 0,0005x^2 - 0,03x + 0,25$ $0 = x^2 - 60x + 500$ $x_{1/2} = 30 \pm \sqrt{900 - 500}$ $x_1 = 10$ $x_2 = 50$ $z''(10) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$ $z''(50) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$ $z(10) \approx 26,38$ <p>Im 10. Monat läuft die maximale Wassermenge von etwa 26.380 Kubikmetern Wasser hinzu.</p>	4		4
1.4	$z''(x) = 0$ $0 = (0,000025x^2 - 0,0005x - 0,0175) \underbrace{e^{0,05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0 = 0,000025x^2 - 0,0005x - 0,0175$ $0 = x^2 - 20x - 700$ $x_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 + 700}$ $x_1 \approx 38,28$ $x_2 \approx -18,28 \text{ entfällt}$ <p>Der Zulauf nimmt nach Ablauf des 38. Monat, d.h. im 39. Monat, am stärksten ab.</p>			5

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																		
		I	II	III																
1.5	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> <td>50</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>z(x)</td> <td>25</td> <td>26,38</td> <td>24,46</td> <td>17,93</td> <td>7,39</td> <td>0</td> <td>20,09</td> </tr> </table> 	x	0	10	20	30	40	50	60	z(x)	25	26,38	24,46	17,93	7,39	0	20,09	2		
x	0	10	20	30	40	50	60													
z(x)	25	26,38	24,46	17,93	7,39	0	20,09													
1.6	$Z'(x) = (0,2x^2 - 28x + 1060)e^{0,05x}$ $= (0,4x - 28)e^{0,05x} + 0,05(0,2x^2 - 28x + 1060)e^{0,05x}$ $= (0,01x^2 - x + 25)e^{0,05x}$ $= z(x)$ $Z(0) = 1060$ $Z(12) = 1371,69$ $\int_0^{12} z(x)dx = Z(12) - Z(0) = 311,69$ <p>Es fließen im ersten Jahr 311.690 Kubikmeter Wasser hinzu.</p>		3																	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	18	6																
	Summe der BE	34																		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	<p>Polstelle: $N(x) = 0$ und $Z(x) \neq 0$</p> <p>$N(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$</p> <p>$Z(-1) = 9 \neq 0 \Rightarrow$ es gibt eine Polstelle.</p> <p>Verhalten an der Polstelle $x = -1$ (Testeinsetzungen): VZW von - nach +</p> <p>$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</p>	1		
2.2	<p>Schnittpunkt mit x-Achse:</p> <p>$f(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = x_0^2 + 8 \Rightarrow$ nicht lösbar $\Rightarrow S_x$ existiert nicht</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse:</p> <p>$f(0) = 4 \Rightarrow S_y(0 4)$</p>	1		
2.3	<p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$</p> <p>Polynomdivision:</p> $(x^2 + 8) : (2x + 2) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{9}{2x + 2}$ $\begin{array}{r} x^2 + x \\ -x + 8 \\ \hline -x - 1 \\ \hline 9 \end{array}$ <p>$\Rightarrow a(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$</p>	2		
2.4	$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x + 2) - 2 \cdot (x^2 + 8)}{(2x + 2)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 2x^2 - 16}{(2x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 16}{(2x + 2)^2}$			3
2.5	<p>$f'(x_E) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$</p> <p>$\Rightarrow x_1 = 2$ und $f''(2) > 0 \Rightarrow T(2 2)$</p> <p>$\Rightarrow x_2 = -4$ und $f''(-4) < 0 \Rightarrow H(-4 -4)$</p>			6

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																				
		I	II	III																		
2.6	<p>Ergänzung der Wertetabelle:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>-8</td> <td>-6</td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>-5,1</td> <td>-4,4</td> <td>-4,3</td> <td>-6,0</td> <td>2,3</td> <td>2,4</td> <td>3,1</td> <td>4,0</td> </tr> </table> 	x	-8	-6	-3	-2	1	4	6	8	f(x)	-5,1	-4,4	-4,3	-6,0	2,3	2,4	3,1	4,0	2		
x	-8	-6	-3	-2	1	4	6	8														
f(x)	-5,1	-4,4	-4,3	-6,0	2,3	2,4	3,1	4,0														
			4																			
2.7	<p>$f(0) = f(8) = 4$</p> <p>Der Schwerpunkt S befindet sich sowohl bei dem leeren als auch bei dem vollständig gefüllten Gefäß in derselben Höhe von 4 dm.</p> <p><i>[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</i></p>			2																		
2.8	<p>Bis zu einer Füllhöhe von 2 dm sinkt der Schwerpunkt S in Richtung Gefäßboden, danach steigt er wieder an.</p> <p>Bei einer Füllhöhe von 2 dm liegt der Schwerpunkt S genau auf der Wasseroberfläche.</p> <p><i>[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</i></p>			2																		
2.9	$2,4 = f(x) \Rightarrow 2,4 = \frac{x^2 + 8}{2x + 2}$ $\Rightarrow 4,8x + 4,8 = x^2 + 8$ $\Leftrightarrow x^2 - 4,8x + 3,2 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 4 \text{ und } x_2 = 0,8$ <p>Bei einer Füllhöhe von mindestens 0,8 dm bis maximal 4,0 dm liegt der Schwerpunkt S höchstens 2,4 dm über dem Gefäßboden.</p>			3																		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	7																		
	Summe der BE	33																				

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2,0 \end{pmatrix}$ <p>Normalenvektor:</p> $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix}, \text{ somit gilt: } E: 5x - 165y + 7500z = d$ <p>Einsetzen der Koordinaten liefert: $d = 20250$.</p> $E: 5x - 165y + 7500z = 20250$	2		
3.2	$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2,0 \end{pmatrix} \text{ (aus 3.1) und } \vec{BC} = \begin{pmatrix} -90 \\ 20 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $ \vec{AB} = \sqrt{8502,25} \approx 92,2 \text{ LE, entspricht } 92,2 \text{ m}$ $ \vec{AC} = \sqrt{9004} \approx 94,9 \text{ LE, entspricht } 94,9 \text{ m}$ $ \vec{BC} = \sqrt{8500,25} \approx 92,2 \text{ LE, entspricht } 92,2 \text{ m}$ <p>Das Dreieck ABC ist nahezu gleichschenkelig.</p>	1		
3.3	<p>Parallelitätsbedingung:</p> $\vec{n}_E \circ \vec{P_K P_B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -2,2 \end{pmatrix} = -15000 \neq 0$ <p>Das Stahlseil verläuft <u>nicht</u> parallel zur Ebene E.</p> <p>Bestimmung des Winkels zwischen Stahlseil und x-y-Ebene:</p> $\sin \alpha = \frac{ \vec{P_K P_B} \circ \vec{n}_{xy} }{ \vec{P_K P_B} \cdot \vec{n}_{xy} } = \frac{2,2}{31,7 \cdot 1} = 0,0694 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4^\circ$ <p>Bestimmung des Gefälles des Stahlseiles:</p> $\tan \alpha \approx 0,0699 \quad \Rightarrow \quad 7\%$		3	
3.4	<p>Abstand des Punktes $S(18 66 5,64)$ zur Ebene E:</p> $d = \left \frac{20250 - (5 \cdot 18 - 165 \cdot 66 + 7500 \cdot 5,64)}{7502} \right = \frac{11250}{7502} \approx 1,5 \text{ LE}$ <p>$d \approx 1,5 \text{ LE}$, entspricht 1,5 m</p> <p>Der Abstand von Punkt S zur Ebene E beträgt 1,5 m.</p>			4

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.5	<p>Aufstellen der Geradengleichung für die Seilrutsche und den Mast:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 74 \\ 7,4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -2,2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ 69 \\ 4,0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p>Die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen g und h ergibt eine eindeutige Lösung mit $u = 0,5$ und $v = 2,3$. Der Mast würde die Seilrutsche berühren, da $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq v \leq 8$ gilt.</p>	2	2	1
3.6	<p>Punkt M in E einsetzen: $E: 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot 4,0 = 18750 \neq 20250$ M liegt nicht in E.</p> <p>M^* mit $M^*(27 69 z)$ sei ein Punkt der Ebene E: $E: 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot z = 20250 \Rightarrow z = 4,2$ Da die z-Koordinate von M^* größer ist als die z-Koordinate von M, liegt M unterhalb der Ebene E.</p>	1		4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	17	6
	Summe der BE	33		