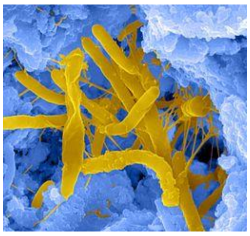
Bakterien vermehren sich *exponentiell*

Reales Problem:
Mediziner züchten für die Erforschung von Krankheiten Bakterien in sogenannten Petrischalen (Bild rechts). Bakterien vermehren sich durch Zellteilung. Das heißt, aus einer werden zwei. Bei den Bakterien hier dauert das eine Stunde. Also verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien innerhalb einer Stunde. Damit Forschungsprozesse geplant werden können, interessieren sich die Medizinforscher dafür, wann wie viele Bakterien vorhanden sind.


[1]

Mathematisches Problem:
Gesucht ist die *Funktionsgleichung*, die das Wachstum der Bakterien möglichst genau beschreibt.

Aufgabe 1 – Exponentielles Wachstum entdecken
a) Ergänze die Tabelle. Trage unter den Pfeilen ein, wie man von einem Wert zum nächsten kommt.

x: *Zeit (in h)*	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$: *Anzahl*	10	20	40				

$\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___

b) Gib an, wie man rechnen muss, um vom Anfangsbestand ($a = 10$ Bakterien) auf die Anzahl der Bakterien nach einer, zwei, vier, sieben Stunden und so weiter zu kommen. Tipp: Schaue dir die Wertetabelle und die Rechnung unter den Pfeilen genau an! [*Hilfe siehe Rückseite oben*]

$f(1) = 10 \cdot 2 = 20$

$f(2) = 10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$

$f(4) = 10 \cdot$

$f(7) = 10 \cdot$

$f(9) = 10 \cdot$

$f(15) = 10 \cdot$

c) Eine Forscherin fragt sich, wie viele Bakterien wohl nach 24 Stunden vorhanden sind. Berechne möglichst geschickt.

$f(24) = 10 \cdot$

Antwortsatz:

[1] Microorganisms (Bacteria) on natural Zeolite (SEM image), Stefan Weiss, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons [01.03.2022]

Aufgabe 2 – Funktionsgleichung aufstellen
Eine andere Bakterienart vermehrt sich noch schneller. Innerhalb einer Stunde verdreifacht sie sich.
a) Ergänze die Tabelle. Trage unter den Pfeilen ein, wie man von einem Wert zum nächsten kommt.

x: $Zeit$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$: $Anzahl$	20	60	180				

$\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___ $\cdot$___

b) Gib an, wie man rechnen muss, um vom Anfangsbestand ($a = 20$ Bakterien) auf die Anzahl der Bakterien nach einer, zwei, drei, sechs und zehn Stunden zu kommen.

$f(1) = 20 \cdot$

$f(2) = 20 \cdot$

$f(3) = 20 \cdot$

$f(6) = 20 \cdot$

$f(10) = 20 \cdot$

c) Fülle die Wertetabelle nun erneut aus. Schreibe diesmal aber mit Potenzen.

x: $Zeit\ (in\ h)$	1	2	3	6	10
$f(x)$: $Anzahl$	$20 \cdot \quad = 60$	$20 \cdot \quad = 180$	$20 \cdot \quad =$	$20 \cdot \quad =$	$20 \cdot \quad =$

d) Erkennst du das System? Gib die Funktionsgleichung für das Bakterienwachstum an, mit der wir direkt berechnen können, wie viele Bakterien nach x Stunden vorhanden sind.

$f(x) =$

e) Eine Forscherin möchte wissen, wie viele Bakterien sie am nächsten Morgen um 8:00 Uhr vorfindet, wenn sich um 16:00 Uhr 20 Bakterien in eine Petrischale befinden.

$f(\quad) =$

Transfer 1 [im Heft]
Gib die Funktionsgleichung für das Wachstum dieser Bakterienart an, wenn am Anfang 50 Bakterien in der Petrischale sind.

Transfer 2 [im Heft]
Gib die Funktionsgleichung für das Wachstum einer Bakterienart an, die sich innerhalb einer Stunde vervierfachen, für den Fall, dass am Anfang 78 Bakterien vorhanden sind.

Transfer 3 [im Heft]
(1) Gib eine allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = \cdots$ für exponentielles Wachstum an, wenn a den Anfangsbestand und b den Wachstumsfaktor bezeichnet.
(2) Begründe, warum dieser Funktionstyp ***Exponentialfunktion*** genannt wird.

Exponent
2^3
Basis

Definition: ***Exponentielles Wachstum*** $f(x) =$

wobei a für den ________________________ zum Zeitpunkt x =
und b für den ________________________ steht.

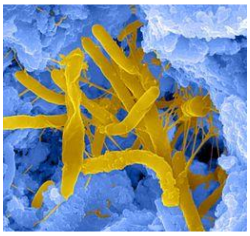
Extraaufgabe

Das menschliche Darmbakterium *Escherichia coli* hat unter Idealbedingungen in Laborkulturen eine Generationszeit von etwa 20 Minuten. Das heißt, es verdoppelt sich also alle 20 Minuten.
a) Berechne die Anzahl der Bakterien nach 6 Stunden, wenn zu Beginn 40 Bakterien vorhanden sind.
b) Stelle eine passende Funktionsgleichung zu diesem Problem auf.

Musterlösung

Bakterien vermehren sich *exponentiell*

Reales Problem:
Mediziner züchten für die Erforschung von Krankheiten Bakterien in sogenannten Petrischalen (Bild rechts). Bakterien vermehren sich durch Zellteilung. Das heißt, aus einer werden zwei. Bei den Bakterien hier dauert das eine Stunde. Also verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien innerhalb einer Stunde. Damit Forschungsprozesse geplant werden können, interessieren sich die Medizinforscher dafür, wann wie viele Bakterien vorhanden sind.


[1]

Mathematisches Problem:
Gesucht ist die *Funktionsgleichung*, die das Wachstum der Bakterien möglichst genau beschreibt.

Aufgabe 1 – Exponentielles Wachstum entdecken
a) Ergänze die Tabelle. Trage unter den Pfeilen ein, wie man von einem Wert zum nächsten kommt.

x: *Zeit*	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$: *Anzahl*	10	20	40	80	160	320	640

$\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$

b) Gib an, wie man rechnen muss, um vom Anfangsbestand ($a = 10$ Bakterien) auf die Anzahl der Bakterien nach einer, zwei, vier, sieben Stunden und so weiter zu kommen. Tipp: Schaue dir die Wertetabelle und die Rechnung unter den Pfeilen genau an! [*Hilfe siehe Rückseite oben*]

$f(1) = 10 \cdot 2 = 20$

$f(2) = 10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$

$f(4) = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$

$f(7) = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^7 = 1280$

$f(9) = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^9 = 5120$

$f(15) = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^{15} = 327680$

c) Eine Forscherin fragt sich, wie viele Bakterien wohl nach 24 Stunden vorhanden sind. Berechne möglichst geschickt.

$f(24) = 10 \cdot 2^{24} = 167772160$

Antwortsatz:

Nach 24 Stunden sind 167772160 Bakterien vorhanden.

[1] Microorganisms (Bacteria) on natural Zeolite (SEM image), Stefan Weiss, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons [01.03.2022]

Aufgabe 2 – Funktionsgleichung aufstellen
Eine andere Bakterienart vermehrt sich noch schneller. Innerhalb einer Stunde verdreifacht sie sich.
a) Ergänze die Tabelle. Trage unter den Pfeilen ein, wie man von einem Wert zum nächsten kommt.

x: *Zeit*	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$: *Anzahl*	20	60	180	540	1620	4860	14580
	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	

b) Gib an, wie man rechnen muss, um vom Anfangsbestand ($a = 20$ Bakterien) auf die Anzahl der Bakterien nach einer, zwei, drei, sechs und zehn Stunden zu kommen.

$f(1) = 20 \cdot 3 = 60$

$f(2) = 20 \cdot 3 \cdot 3 = 180$

$f(3) = 20 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 540$

$f(6) = 20 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 20 \cdot 3^6 = 14580$

$f(10) = 20 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 20 \cdot 3^{10} = 1180980$

c) Fülle die Wertetabelle nun erneut aus. Schreibe diesmal aber mit Potenzen.

x: *Zeit*	1	2	3	6	10
$f(x)$: *Anzahl*	$20 \cdot 3^1 = 60$	$20 \cdot 3^2 = 180$	$20 \cdot 3^3 = 540$	$20 \cdot 3^6 = 14580$	$20 \cdot 3^{10} = 1180980$

d) Erkennst du das System? Gib die Funktionsgleichung für das Bakterienwachstum an, mit der wir direkt berechnen können, wie viele Bakterien nach x Stunden vorhanden sind.

$f(x) = 20 \cdot 3^x$

e) Eine Forscherin möchte wissen, wie viele Bakterien sie am nächsten Morgen um 8:00 Uhr vorfindet, wenn sich um 16:00 Uhr 20 Bakterien in eine Petrischale befinden.

$f(16) = 20 \cdot 3^1 = 860934420$

Transfer 1 [im Heft]
Gib die Funktionsgleichung für das Wachstum von Bakterien an, wenn statt 20 Bakterien 50 Bakterien am Anfang in der Petrischale sind.

$f(x) = 50 \cdot 3^x$

Transfer 2 [im Heft]
Gib die Funktionsgleichung für das Wachstum von Bakterien an, die sich innerhalb einer Stunde vervierfachen, wenn am Anfang 78 Bakterien vorhanden sind.

$f(x) = 78 \cdot 4^x$

Transfer 3 [im Heft]
(1) Gib eine allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = \cdots$ für exponentielles Wachstum an, wenn a den Anfangsbestand und b den Wachstumsfaktor bezeichnet.

$f(x) = a \cdot b^x$

(2) Begründe, warum dieser Funktionstyp ***Exponentialfunktion*** genannt wird.

Exponent
2^3
Basis

Weil die Variable x im Exponenten steht.

Definition: ***Exponentielles Wachstum*** $f(x) = a \cdot b^x$

wobei a für den *Anfangsbestand* zum Zeitpunkt x = 0
und b für den *Wachstumsfaktor* steht.

Extraaufgaben
Das menschliche Darmbakterium *Escherichia coli* hat unter Idealbedingungen in Laborkulturen eine Generationszeit von etwa 20 Minuten. Das heißt es verdoppelt sich also alle 20 Minuten.

a) Berechne die Anzahl der Bakterien nach 6 Stunden, wenn zu Beginn 40 Bakterien vorhanden sind.

$f(6) = 40 \cdot 2^{3 \cdot 6} = 10485760$, *weil sich die Bakterien innerhalb einer Stunde dreimal verdoppeln.*

b) Stelle eine passende Funktionsgleichung zu diesem Problem auf.

$f(x) = 40 \cdot 2^{3 \cdot x} = 40 \cdot (2^3)^x = 40 \cdot 8^x$