Berlin
Senatsverwaltung für Bildung,
Wissenschaft und Forschung

Bildung für Berlin

Mathematik ist mehr als Rechnen

30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

SINUS
Grundschule
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Grundschule Mathematik

Mathematik ist mehr als Rechnen

30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

SINUS
Grundschule
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Herausgeber
Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung
Otto-Braun-Straße 27, 10178 Berlin
Telefon 030 90227 5050

www.berlin.de/sen/bwf

Verantwortlich
VI A: Allgemeinbildende Unterrichtsfächer
Elke Dragendorf

Redaktion
VI A 1.1
Astrid Gebert
astrid.gebert@senbwf.berlin.de

Gestaltung
Studio SYBERG, Berlin

Titelbild
Susanne Hauk, Grundschule im Blumenviertel, Berlin

Druck
Druckerei Hermann Schlesener KG, Berlin

1. Auflage, 2011

Vorwort

Die Entwicklung und die Etablierung einer neuen Aufgabenkultur sind die zentralen Anliegen des Berliner Modellvorhabens SINUS-Grundschule, in dem 60 Berliner Grundschulen seit sieben Jahren ihren Mathematikunterricht weiter entwickeln. Lehrerinnen und Lehrer sind darum bemüht, auch im Mathematikunterricht den Kindern mehr das Wort zu geben, sie zum Nachdenken über Zusammenhänge im Bereich der Zahlen und Formen anzuregen und sie zum Austausch über ihre gemachten Beobachtungen und Entdeckungen herauszufordern. Aus dem Blickwinkel der KMK-Bildungsstandards gesprochen geht es um die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen.

Mit der vorliegenden Aufgabensammlung halten Sie 30 Beispiele für Unterrichtsideen in den Händen, die an Berliner SINUS-Schulen erfolgreich ausprobiert wurden. Diese Aufgaben haben gezeigt, wie überraschend einfach es häufig ist, mit Kindern auch im Mathematikunterricht intensiv ins Gespräch zu kommen und ihnen zu zeigen, dass Mathematik viel mehr ist als nur Rechnen.

Bedanken möchten wir uns an dieser Stelle bei allen SINUS-Schulen, die Beiträge für eine Veröffentlichung geschrieben haben. Herzlichen Dank auch der Kollegin Bärbel Hagedorn für die Unterstützung bei der redaktionellen Überarbeitung der Aufgaben. Ein ganz besonderer Dank gilt den Schulen, die das vorliegende Heft ermöglicht haben und deren Beiträge nun gedruckt vor Ihnen liegen:

Allegro-Grundschule, Carl-Orff-Grundschule, Christian-Morgenstern-Grundschule,
Comenius-Schule, Dunant-Grundschule, Erika-Mann-Grundschule,
Evangelische Schule Wilmersdorf, Franz-Marc-Grundschule, Galilei-Grundschule,
Grundschule am Dielingsgrund, Grundschule am Rüdesheimer Platz,
Grundschule am Sandsteinweg, Grundschule auf dem Tempelhofer Feld,
Grundschule im Blumenviertel, Hermann-Nohl-Grundschule,
Jens-Nydahl-Grundschule, Karlsgarten-Schule, Katholische Schule Sankt Marien,
Lenauschule, Liebmann-Schule, Marienfelder-Grundschule, Paul-Klee-Grundschule,
Pestalozzi-Schule, Reinhardswald-Grundschule, Ruppin-Grundschule,
Schule am Zwickauer Damm, Wald-Grundschule und Walt-Disney-Grundschule.

Wir hoffen, dass Sie die vorliegenden Aufgaben in Ihrem Unterricht gewinnbringend einsetzen und Ihr bewährtes Unterrichtsmaterial damit ergänzen können, dass Sie neue Anregungen für Ihren Unterricht bekommen und dass Gespräche über mathematische Zusammenhänge ein wesentlicher Bestandteil Ihres Unterrichts bleiben bzw. werden.

Christian Bänsch

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Was man lernen muss, um es zu tun,
das lernt man, indem man es tut.

Aristoteles

Inhalt

Einleitung

> Die Familie sitzt beim Abendbrot. Der dreieinhalbjährige Fabian zählt seine Häppchen. „Eins-zwei-drei-vier-fünf-sieben-acht-neun.“ „Du hast die sechs vergessen“, korrigiere ich ihn. „Es heißt doch fünf-sechs-sieben.“ Erstaunt sieht er mich an und erklärt: „Nein, die habe ich nicht vergessen. Die ist doch schon in meinem Bauch.“

Anne Winning in:
Chr. Selter/H. Spiegel 1997, S. 112

Worum geht es?

Auch in der Schule erleben wir Missverständnisse wie das oben beschriebene sehr häufig: Die Lösung einer Aufgabe erscheint uns falsch oder scheint so gar keinen Sinn zu machen. Aber ist die Antwort so sinnlos, wie sie uns im ersten Moment erscheint? Hat das Kind den Zusammenhang tatsächlich nicht verstanden? Verstehen wir vielleicht das Kind in diesem Moment nicht? Hat das Kind eventuell etwas ganz anderes gedacht, als der Lehrer, die Lehrerin erwartet hat? Nur das Gespräch miteinander lässt uns die Gedankengänge der Kinder verstehen und kann umgekehrt den Kindern unsere Absichten begründet und einsichtig nahe bringen.

Im Rahmen des Modellvorhabens SINUS-Grundschule Berlin ist es den mitarbeitenden Lehrerinnen und Lehrern ein ganz besonderes Anliegen, den Unterricht so zu gestalten, dass er den Beteiligten möglichst viel Gelegenheit bietet, sich auszutauschen über das, was sich Kinder und Lehrer gedacht haben. Dies erfordert nicht nur eine organisatorische Änderung des Unterrichts, sondern benötigt vor allem Aufgaben, die Spielräume für unterschiedliche Herangehensweisen und einen interessanten Austausch über das jeweilige Vorgehen bieten.

In der vorliegenden Broschüre finden sie 30 Aufgaben, die von den 60 Berliner SINUS-Schulen ausprobiert und für gut befunden oder selbst entwickelt wurden. Im Fokus stand dabei neben der Förderung des Unterrichtsgesprächs besonders die damit eng verbundene Förderung der in den Bildungsstandards verankerten allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Anders als uns manches Lehrmaterial weismachen will ist dies keine zusätzliche inhaltliche (oder gar zeitraubende) Komponente des Unterrichts. Es geht vielmehr durchgängig und konsequent um Aufgabenstellungen, die es den Kindern erlauben, persönliche Lösungswege zu entwickeln und selbständig darzustellen. Aufgabenstellungen, die das gemeinsame Unterrichtsgespräch fördern, damit vielfältige mathematische Kompetenzen anschlussfähig und nachhaltig aufgebaut und gefestigt werden und Fehlvorstellungen möglichst vermieden bzw. frühzeitig erkannt und abgebaut werden.

Das Modellvorhaben SINUS-Grundschule

Im Sommer 2004 startete bundesweit das Programm SINUS-Transfer Grundschule, das es sich zum Ziel gesetzt hatte, den Schülern mehr Verständnis und damit noch mehr bleibenden Gewinn aus dem Mathematikunterricht zu ermöglichen.

Schon Aristoteles wusste: „Was man lernen muss, um es zu tun, das lernt man, indem man es tut.“ Und so ist Lernen mit mehr Verständnis bei den Schülern nicht durch irgendwelche raffinierten Lehrtechniken oder neue Wundermethoden zu erreichen, sondern einzig und allein dadurch, dass der Unterricht konsequent die Eigenaktivität der Kinder herausfordert, zulässt, unterstützt und wertschätzt. Die Schülerinnen und Schüler stärker im Unterricht zu mobilisieren und zu echtem Kompetenzerwerb zu führen, ist das vorrangige Ziel der Unterrichtsentwicklung im Modellvorhaben SINUS-Grundschule.

Der zweite wesentliche Baustein der Unterrichtsentwicklung ist die Zusammenarbeit der Lehrkräfte sowohl innerhalb der teilnehmenden Schule als auch in Netzwerken über die eigene Schule hinaus – Teamarbeit und Kooperation. Die Anregungen durch Weiterbildungen und Module, die gemeinsame Umsetzung neuer Erkenntnisse im Unterricht sowie die Reflexion der im Unterricht gemachten Erfahrungen in einer Gruppe von Kolleginnen und Kollegen sind weitere zentrale Momente des Modellvorhabens. Der konstruktivistische Erwerb mathematischer Kompetenzen als Grundposition für einen erfolgreichen Unterricht wird im gemeinsamen Ausprobieren von Aufgaben, Materialien und Unterrichtsarrangements auch für die Lehrenden erfahrbar.

Die Sichtweise, dass die Mathematik kein vorgefertigtes Regelwerk ist, das nur vermittelt und nachvollzogen werden muss, sondern eine lebendige Wissenschaft, die sich dem Lernenden erst durch das aktive Tun wirklich erschließt, fördert bei den Schülern ein tieferes Verständnis für mathematische Zusammenhänge. Dies zieht auch eine Veränderung der Lehrerrolle nach sich. Zentrale Aufgabe der Lehrkraft wird es immer mehr, Aufgabenstellungen zu formulieren, die die Schüler zu einer aktiven Auseinandersetzung mit den Unterrichtsinhalten motivieren, und dabei ihren Lernprozess unterstützend zu begleiten. Die Lehrerin bzw. der Lehrer gibt Impulse und berät die Lernenden, sie/er moderiert und lenkt das Unterrichtsgespräch und wertschätzt die Präsentation von Lösungswegen. Eine veränderte Anerkennungskultur ist ebenso ein wichtiger Baustein eines geöffneten und kommunikativen Mathematikunterrichts.

Wie ist die Aufgabensammlung entstanden?

Jede der 60 Berliner SINUS-Schulen hat eine Aufgabe ausgewählt, die sich im ganz normalen Unterricht mit einer heterogenen Lerngruppe bewährt hat. Die ersten 30 dieser Aufgaben bilden die Grundlage dieser Veröffentlichung. Die Entstehungsgeschichten der Aufgaben sind unterschiedlich. Die meisten Aufgaben wurden von den Schulen, die sie eingereicht haben, selbst entwickelt. Anderen Aufgaben liegen Ideen aus einer der zahlreichen SINUS-Fortbildungen der letzten Jahre oder aus der Fachliteratur zugrunde, die von den Kolleg/inn/en weiter entwickelt und an die eigene schulische Situation angepasst wurden.

Im Vordergrund der Aufgaben stehen immer die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen und das Entdecken von Mustern und Strukturen. Im Sinne der Stärkung der Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler wurde auf Kopiervorlagen, die den Kindern zur Bearbeitung ausgeteilt werden, ganz bewusst so weit wie möglich verzichtet.

Die Differenzierung ist den Aufgaben größtenteils immanent. Da die Aufgaben ein breites Lösungsspektrum zulassen, kann jedes Kind auf seinem Niveau arbeiten. Das hat den großen Vorteil, dass die im Unterricht gemachten Erfahrungen sich für alle auf denselben Lerninhalt beziehen. Dies bildet die notwendige Grundlage für den anregenden Austausch und das gemeinsame Unterrichtsgespräch.

Wie ist die Aufgabensammlung aufgebaut?

Nach der Einleitung erhalten Sie zunächst in einer Tabelle eine Übersicht über die ausgewählten Aufgaben. Neben Namen und Nummer der Aufgabe finden Sie weitere wesentliche Merkmale: eine Zuordnung zur vorgesehenen Jahrgangsstufe, dem Themenfeld und der jeweiligen Anforderung des Rahmenlehrplans sowie die bei der Aufgabe besonders geförderte allgemeine mathematische Kompetenz gemäß den Bildungsstandards der KMK.

Der Vorschlag für den Einsatz der Aufgabe in einer bestimmten Jahrgangsstufe ist größtenteils sehr weit gefasst. Er hängt vor allem davon ab, wie die Aufgabe eingesetzt wird: als Einstieg in ein neues Thema, zur Festigung oder Vertiefung bereits vertrauter Inhalte oder als „Solitär" beispielsweise für eine Vertretungsstunde.

Dann folgen die 30 Aufgaben, die in der Regel auf jeweils einer Seite untergebracht sind. Die Reihenfolge orientiert sich an den Themenbereichen des Rahmenlehrplans. Die Erläuterungen zu den Aufgaben sollen es Ihnen erleichtern, die Aufgaben ohne viel Vorbereitung im Unterricht einzusetzen. Die Autor/inn/en waren bemüht, die erklärenden Texte knapp zu halten

Unter der Überschrift „Worum geht es?" findet sich jeweils eine kurze fachliche Einbettung der Aufgabe mit den zugrunde liegenden mathematischen Überlegungen. Die fachlichen Ausführungen sind als Hintergrundinformation für die Lehrkraft gedacht; selbstverständlich sind hiermit keine Erwartungen an die Schüler/innen formuliert. Methodische Ideen zur Einführung der Aufgabe, zur Unterrichtsgestaltung und zur Auswertung und Präsentation der Schülerarbeiten werden im Teil „Wie kann man vorgehen?" dargestellt.

In der weißen Randspalte neben der Aufgabe finden sich neben der Verortung im Rahmenlehrplan und in den Bildungsstandards praktische Hinweise zur vorgesehenen Klassenstufe, den benötigten Materialien und den im Anhang befindlichen Kopiervorlagen. Auch spezifische Literatur zur jeweiligen Aufgabe ist gegebenenfalls in der Randspalte untergebracht.

Im Anschluss an die Aufgaben finden sie einige ausgewählte Kopiervorlagen. Teilweise sind sie so gestaltet, dass sie von den Schülerinnen und Schülern direkt ins Heft geklebt werden können. Zur Arbeitserleichterung und zur Einsparung von Kopierkosten erscheint eine Aufgabe dann mehrfach auf der Seite.

Am Ende der Publikation findet sich die Literaturliste. Sie enthält neben der verwendeten Literatur vor allem Anregungen und Empfehlungen zum Weiterlesen.

Übersicht

Aufgabe	Klasse	Themenfeld	Anforderung des Rahmenlehrplans	Kompetenz
1 Kombinieren im Kästchenraster	1 bis 2 JÜL	Form und Veränderung	Räumliche oder ebene Veränderungsprozesse ausführen und beschreiben	Problemlösen
2 Dreiecke entdecken	1 bis 3	Form und Veränderung	Ebene Figuren erkennen, benennen, zerlegen, beschreiben, darstellen und zusammensetzen	Argumentieren
3 Vom Würfelnetz zum Würfel	3 bis 4	Form und Veränderung	Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern	Problemlösen
4 Pentomino-Kalender	3 bis 4 JÜL	Form und Veränderung	Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern	Problemlösen
5 Welche Figur ist die größte?	3 bis 4	Form und Veränderung	Längen, Flächen und Körper bezüglich ihrer Abmessungen vergleichen	Problemlösen
6 Bruchvorstellungen	3 bis 4	Form und Veränderung	Arithmetische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen	Argumentieren
7 Terrasse mit Obstbaum	4 bis 6	Form und Veränderung	Zahl- und Rechenvorstellungen mit Hilfe geometrischer Vorstellungen entwickeln	Problemlösen
8 Quadrat-Puzzle	3 bis 4 JÜL	Form und Veränderung	Arithmetische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen	Problemlösen
9 Neue Fliesen	3 bis 4	Form und Veränderung	Den Zusammenhang von Umfang und Flächeninhalt erkennen und beschreiben	Problemlösen
10 Zahlenfeld	3 bis 4 JÜL	Zahlen und Operationen	Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen	Kommunizieren
11 Zahlensteckbrief	1 bis 4 JÜL	Zahlen und Operationen	Zahlen unter den verschiedenen Zahlaspekten auffassen und darstellen	Darstellen
12 Eicheln sammeln	3 bis 4 JÜL	Zahlen und Operationen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen	Problemlösen
13 Mal-Plus-Haus	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen und in verschiedenen Situationen anwenden	Argumentieren
14 Zahlenmuster am Taschenrechner	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen	Argumentieren
15 Schriftliche Addition	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Schriftliche Verfahren der Addition ausführen und beschreiben	Problemlösen

Aufgabe	Klasse	Themenfeld	Anforderung des Rahmenlehrplans	Kompetenz
16 Schöne Päckchen	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen	Kommunizieren
17 Zahlenmauerbau	2 bis 6	Zahlen und Operationen	Im Zahlenraum bis 100 sicher addieren und substrahieren	Kommunizieren
18 Zahlen jagen	2 bis 6	Zahlen und Operationen	Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen	Kommunizieren
19 Rechenzüge	4 bis 6	Zahlen und Operationen	Schriftliche Rechenverfahren im Bereich der natürlichen Zahlen anwenden	Kommunizieren
20 Stauaufgabe	3 bis 5	Zahlen und Operationen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen	Modellieren
21 Kreuzzahlen auf der Hundertertafel	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen	Kommunizieren
22 Die tolle 15	3 bis 4	Zahlen und Operationen	Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen	Argumentieren
23 Das geheimnisvolle Viereck	4 bis 6	Zahlen und Operationen	Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen und in verschiedenen Situationen anwenden	Problemlösen
24 Herr Durchblick stand auf der Leiter	4 bis 6	Zahlen und Operationen	Aus Handlungen und Sachverhalten Operationen herauslösen und zu Gleichungen führen	Kommunizieren
25 Bunte Balken	1 bis 4 JÜL	Daten und Zufall	Daten erfassen, aufbereiten und darstellen	Darstellen
26 Lieblingstiere	1 bis 2 JÜL	Daten und Zufall	Daten erfassen, aufbereiten und darstellen	Darstellen
27 Handypin	4 bis 6	Daten und Zufall	Anordnungen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen	Argumentieren
28 Siegerehrung	2 bis 4 JÜL	Daten und Zufall	Einfache kombinatorische Aufgaben lösen	Problemlösen
29 Gummibärchen	2 bis 4	Größen und Messen	Zu Sachsituationen Fragestellungen entwickeln	Modellieren
30 Was bedeutet DIN A4?	3 bis 4	Größen und Messen	Daten zu Größen auf unterschiedliche Art gewinnen, aufbereiten und Aussagen dazu treffen	Argumentieren

1 Kombinieren im Kästchenraster

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Räumliche oder ebene Veränderungsprozesse ausführen und beschreiben

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Klassenstufe
1 bis 2
JÜL-geeignet

Material
- pro Kind 10 Wendeplättchen oder Steckwürfel

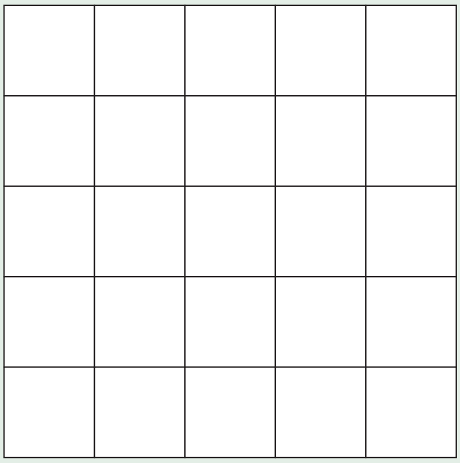
➔ Kopiervorlage im Anhang

Alf Abel liebt Rätsel. Er möchte 10 Plättchen so in die 25 Kästchen verteilen, dass in jeder Reihe und in jeder Spalte genau 2 Plättchen liegen.
Kannst du ihm helfen?

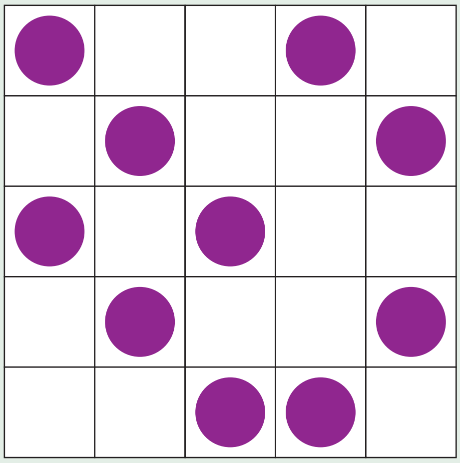
Nimm 10 Plättchen und finde verschiedene Lösungen.

Male deine Lösungen in das Arbeitsblatt. Wie viele Lösungen findest du?

Kästchenraster:



Beispiellösung:

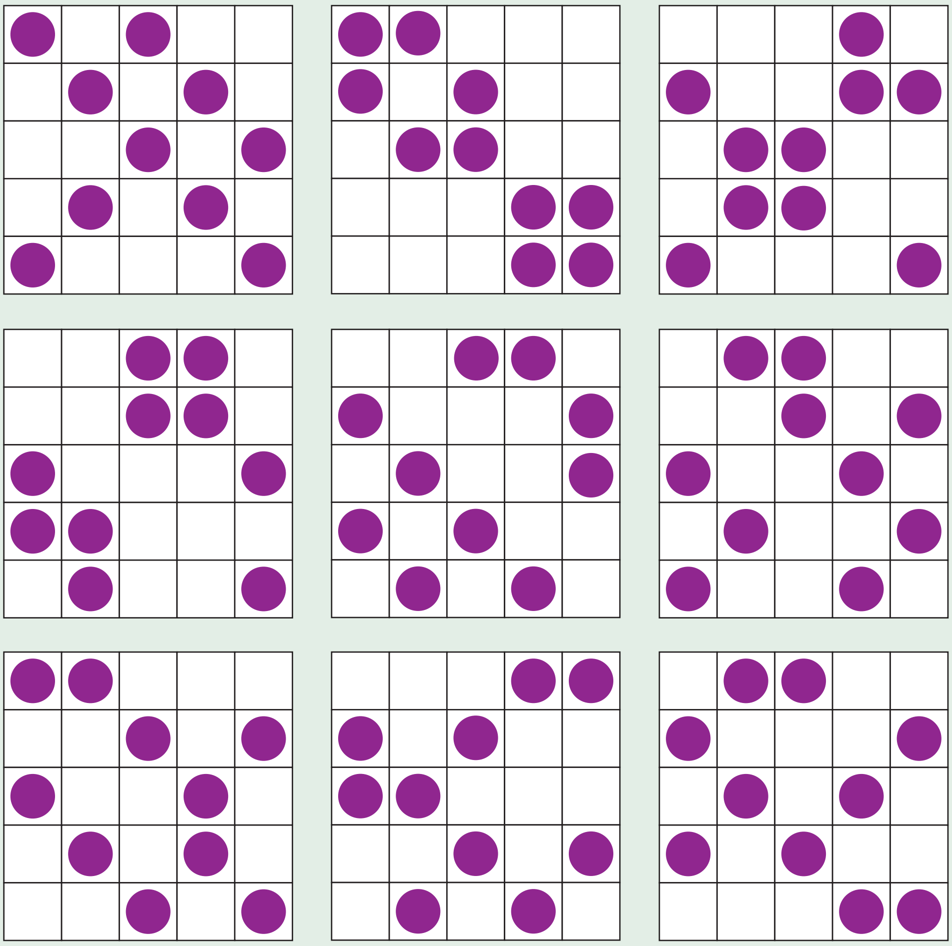


Worum geht es?
Auf einem Kästchenraster mit fünf mal fünf Kästchen sollen zehn Plättchen so angeordnet werden, dass in jeder Reihe und in jeder Spalte genau zwei liegen. Für diese Aufgabe gibt es eine Vielzahl von unterschiedlichen Lösungen, die durch Ausprobieren mit Plättchen im fünf mal fünf – Raster leicht herausgefunden werden können. Es lassen sich kaum Gesetzmäßigkeiten für richtige Lösungen finden. Durch Spiegelungen und Drehungen können systematisch weitere Lösungen erarbeitet werden.

Man kann zunächst auch einfach probieren:
Man legt zwei Plättchen in die erste (oder eine andere) Reihe (oder Spalte) und ergänzt nach und nach jeweils zwei weitere Plättchen, wobei man ständig alle Reihen und Spalten daraufhin überprüfen muss, ob die Vorgabe „zwei Plättchen pro Reihe/Spalte“ noch eingehalten wurde. Dafür ist eine Erfassung der vertikalen und horizontalen Anordnung der Plättchen im Kästchenraster erforderlich.
Sind alle 10 Plättchen verteilt, wird die jeweilige Lösung in den Arbeitsbogen eingezeichnet.

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Grundschule / Mathematik ist mehr als Rechnen – 30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

Einige Lösungsmöglichkeiten:



Wie kann man vorgehen?
Wenn das Raster groß an die Tafel gezeichnet wird, kann man Alf Abels Rätsel mit 10 Magnetplättchen für alle Schüler gut veranschaulichen. Die Begriffe „Spalte“ und „Reihe“ müssen geklärt werden. Mindestens drei Lösungen sollten gemeinsam an der Tafel gefunden werden, bevor sich die Kinder zunächst in Einzelarbeit mit dem Problem beschäftigen. Dazu erhalten sie ein Raster, 10 Plättchen sowie einen Arbeitsbogen zum Dokumentieren ihrer Ergebnisse.
Um ins Gespräch zu kommen und über die Verteilung der Plättchen zu reden („In dieser Reihe hast du aber schon drei (oder erst ein) Plättchen…“), ist es sinnvoll, dass die Kinder schließlich in Paaren oder Gruppen zusammen arbeiten und ihre Ergebnisse zusammenstellen. Die verschiedenen Lösungen werden an der Tafel gesammelt und präsentiert. Dabei haben die Schüler Gelegenheit, ihr (eventuell systematisches) Vorgehen beim Finden von Lösungen zu beschreiben und auf entdeckte Symmetrien hinzuweisen.

2 Dreiecke entdecken

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Ebene Figuren erkennen, benennen, zerlegen, beschreiben, darstellen und zusammensetzen

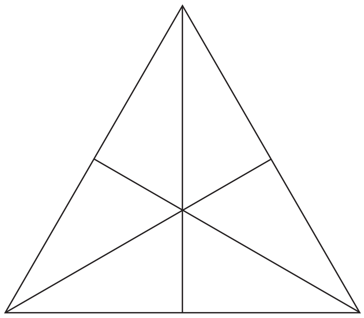
Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen

Klassenstufe
1 bis 3

➔ Kopiervorlage im Anhang

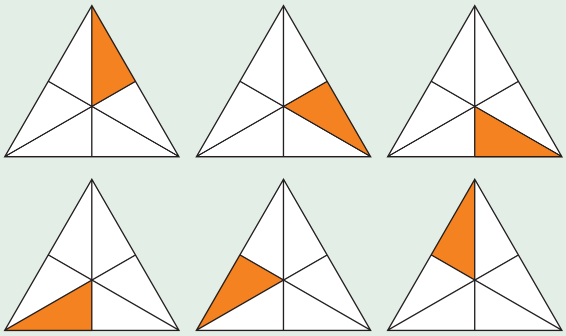
Sofie: In diesem Bild sehe ich 7 Dreiecke.
Hannes: In diesem Bild sehe ich 9 Dreiecke.
Anna: In diesem Bild sehe ich 16 Dreiecke.

Was stimmt?

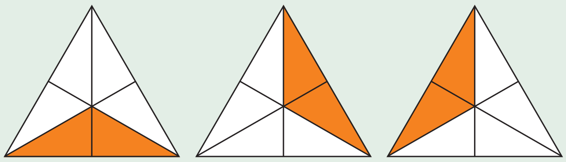


Worum geht es?
Das dargestellte Dreieck besteht aus sechs kleinen Dreiecken.
Durch unterschiedliche Kombination der kleinen Dreiecke lassen sich zehn verschiedene größere Dreiecke zusammensetzen:

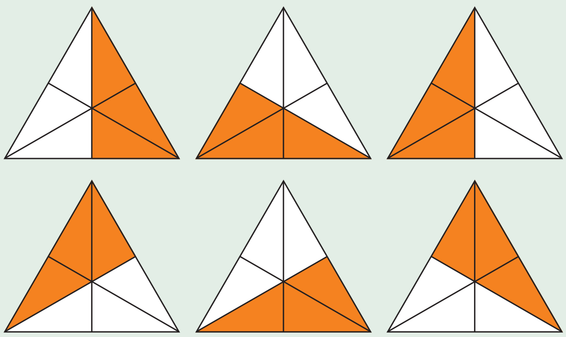
6 kleine „Einer“-Dreiecke



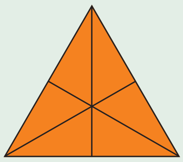
3 „Zweier“-Dreiecke



6 „Dreier“-Dreiecke



1 „Sechser“-Dreieck



Insgesamt lassen sich also 16 Dreiecke entdecken.

Es ist zu erwarten, dass die Kinder schnell die sechs kleinen und das große Gesamtdreieck sehen. Die Fragestellung fordert zum gründlichen Überlegen auf. Die Idee, dass auch zwei oder sogar drei Dreiecke zu einem größeren Dreieck zusammengefasst werden können ist Grundlage dafür, sich die Gesamtansicht immer wieder neu zu unterteilen und anders zusammen zu setzen. Um Doppelungen auszuschließen und sicher zu sein, dass alle möglichen Dreiecke gefunden wurden, ist eine systematischen Übersicht von großem Vorteil. Es bietet sich an, dazu die Anzahl der benutzten kleinen Dreiecke als Ordnungskriterium zu verwenden.
Die Aufgabe fordert zum Austausch mit anderen und zum Argumentieren auf, wenn die Ausagen von Sofie, Hannes und Anna ausgewertet werden.

Wie kann man vorgehen?
Die Aufgabe wird der Klasse vorgestellt. Jedes Kind erhält eine Kopiervorlage mit Dreiecken. Zunächst sollte sich jeder allein mit der Aufgabe beschäftigen, damit jeder die Aufgabe durchdringen kann und sich die Schüler nicht zu schnell in ihren Überlegungen einschränken. Die Kinder versuchen, so viele Dreiecke wie möglich zu finden, wobei die Lösungen sowohl zufällig als auch systematisch erfasst werden können.
Danach ist die Weiterarbeit mit einem Partner oder in kleinen Gruppen hilfreich, um Ergebnisse auszutauschen, zu ergänzen, Doppelungen zu erkennen und sich gegenseitig anzuregen. Die Kopiervorlagen sollten als Arbeitsmaterial in ausreichender Anzahl vorhanden sein, um die gefundenen Möglichkeiten einzufärben oder die Einzeldreiecke auszuschneiden. Das gemeinsame Suchen nach Ordnungsstrukturen fördert die Auseinandersetzung mit dem Thema. Auf einem Plakat stellen die Gruppen ihre Ergebnisse übersichtlich dar, wobei die eingefärbten oder ausgeschnittenen und zusammengesetzten Dreiecke verwendet werden.
Eine ausführliche abschließende Präsentation der Gruppenergebnisse vor der Klasse ermöglicht den Schülern, die nicht alle 16 Lösungen gefunden haben, die Vorgehensweisen ihrer Klassenkameraden kennenzulernen und davon zu profitieren.

3 Vom Würfelnetz zum Würfel

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

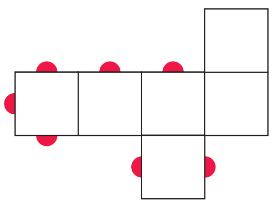
Anforderung
Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern

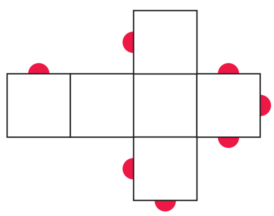
Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Zusammenhänge erkennen und nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Klassenstufe
3 bis 4

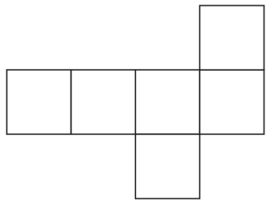
Material
– Klebeetiketten

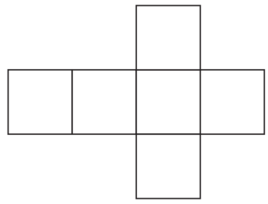
➔ Kopiervorlage im Anhang





Diese Würfelnetze sollen zu einem Würfel zusammengeklebt werden.
Aber es fehlen noch die Klebelaschen.
Wo müssen sie angebracht werden und wie viele müssen es sein?





Worum geht es?

Schneidet man einen Würfel (zwölf Kanten) entlang von sieben Kanten so auf, dass seine sechs Flächen eben liegen und (durch die restlichen fünf Kanten) noch miteinander verbunden sind, erhält man ein Würfelnetz. Es gibt elf verschiedene Würfelnetze. Um ein Würfelnetz wieder zu einem stabilen Würfel zusammenzubauen, benötigt man an sieben Kanten eine Klebelasche, die jeweils zwei Kanten miteinander verbindet. Die Schüler sollen herausfinden, wo diese Klebelaschen angebracht werden und wie viele es sein müssen. Durch die vielen Kombinationsmöglichkeiten gibt es pro Netz 128 (!) mögliche Lösungen.
Im Vorfeld gesammelte Handlungserfahrungen mit Würfelnetzen (z. B. durch das handelnde Entdecken der elf Würfelnetze) erleichtern das Lösen dieser Aufgabe. Das Ausprobieren mit selbstklebenden Streifen als Klebelaschen schafft Spielräume, da falsche Überlegungen mühelos korrigiert werden können. Es erleichtert den Kindern einen handelnden Umgang mit Ebene (Flächennetz) und Raum (Würfel) und unterstützt so die Einsicht in die Zusammenhänge (z. B. welche Kanten jeweils durch eine Lasche verbunden werden). Beim Zusammensetzen des Würfels werden falsche Vorstellungen sofort dadurch deutlich, dass zwei Laschen aufeinanderliegen.

Wie kann man vorgehen?

Im Unterrichtsgespräch kann die Schwierigkeit thematisiert wird, aus einem Würfelnetz (ohne Laschen) einen stabilen Würfel zu bauen. Die Idee der Klebelasche wird besprochen und die abgebildete Aufgabe als Einstieg vorgestellt. Auf einem Arbeitsblatt stehen alle elf Würfelnetze zur Verfügung oder die Schüler zeichnen sie selbst.
Um jedem ausreichend Gelegenheit zum Handeln zu geben und mit der Aufgabe vertraut zu werden ist es sinnvoll, mit Einzelarbeit zu beginnen. Dazu benötigt jeder Schüler einen Arbeitsbogen mit Würfelnetzen und für die Klebelaschen mehrere kleine Haftetiketten. Die Würfelnetze können ausgeschnitten, per Klebelaschen zu einem Würfel zusammengefügt und schließlich wieder auseinandergefaltet und die benötigten Klebelaschen eingezeichnet werden. Die Klebeetiketten werden für die Weiterarbeit benötigt.
Falls vorhanden kann selbstverständlich auch mit vorgefertigten handelsüblichen Materialien gearbeitet werden, die sich mühelos zu einem Netz bzw. Würfel zusammenstecken lassen (z. B. Lokon, Xeo, Polydron).
Die Differenzierung ergibt sich quantitativ, denn jeder Schüler bearbeitet in seinem Tempo nur zwei oder auch mehrere Würfelnetze. Das Finden von mehreren möglichen Lösungen pro Würfelnetz und die Frage, wie viele Lösungen es wohl gibt, vertiefen die Aufgabenstellung. Eine noch anspruchsvollere Variante, die dass Raumvorstellungsvermögen ganz besonders schult, wäre die Bearbeitung der Aufgaben zunächst nur im Kopf.
Beim Gespräch über die gefundenen Lösungen wird deutlich, dass es jeweils unterschiedliche Möglichkeiten gibt. Es sind jedoch immer genau sieben Laschen.

4 Pentomino-Kalender

Ist es möglich, das Kalenderblatt mit sechs der sieben Pentominos so auszulegen, dass nur das Feld mit dem Datum des Tages frei bleibt?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Worum geht es?
Pentominos sind Figuren aus fünf zusammenhängenden Quadraten. Die Quadrate müssen sich jeweils mit einer Seite berühren. Figuren, die sich durch Drehen oder Spiegeln ineinander überführen lassen, werden als identisch betrachtet. Es gibt zwölf unterschiedliche Pentominos, von denen für diese Aufgabe aber nur sieben zur Anwendung kommen (s. Kopiervorlage).
Pentominos sind ein anspruchsvolles Arbeitsmaterial, welches zum handelnden Umgang mit dem Material und zum Ausprobieren verschiedener Lösungen herausfordert. Die nicht abgedeckten Zahlen bieten eine permanente Möglichkeit der Selbstkontrolle.
Um das Tagesdatum frei zu lassen, benötigt man sechs der sieben vorgegebenen Pentominos, denn unabhängig von der Länge des jeweiligen Monats besteht das Raster aus 31 Feldern und es müssen immer (6 mal 5 =) 30 Felder abgedeckt werden.

Wie kann man vorgehen?
Wenn die Aufgabenstellung geklärt wurde, bekommt jeder Schüler ein großes Kalenderblatt mit 31 quadratischen, nummerierten Feldern sowie sieben verschiedene Pentominos, deren Größe auf das Kalenderblatt abgestimmt ist. Zum Dokumentieren ihrer Lösungen könnte den Schülern ein Arbeitsblatt mit mehreren kleinen Kalenderblättern zur Verfügung gestellt werden, auf dem sie mit Buntstiften die unterschiedlichen Lösungen eintragen.
Fertige Dokumente können z. B. an der Tafel gesammelt werden, um sie später zu vergleichen und zu vervollständigen. Die Fragen, ob es verschiedene Lösungen für ein Datum gibt (und wenn ja: wie viele?), warum immer nur sechs der sieben Pentominos benötigt werden oder ob das Auslegen auch mit anderen als den ausgewählten Pentominos funktionieren würde, vertiefen die Arbeit und können anhand der ausgehängten Dokumente im Klassengespräch geklärt werden. Die Phase des gemeinsamen Besprechens der gefundenen Lösungen, des jeweiligen Vorgehens und der dabei entwickelten Ideen ist von zentraler Bedeutung und sollte großzügig eingeplant werden.
Die Differenzierung bei dieser Aufgabe ergibt sich aus der unterschiedlichen Anzahl von Lösungen und der Variation der Daten (alle Tage eines Monats, nur der eigene Geburtstag usw.). Bei der Durchführung der vorgestellten Aufgabe in jahrgangsgemischten Klassen war auffällig, dass nicht unbedingt die älteren Schüler über das bessere räumliche Vorstellungsvermögen verfügten, sondern diese oft über die Jüngeren staunten.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Klassenstufe
3 bis 4
JÜL-geeignet

Material
- 7 unterschiedliche Pentominos
- evtl. Minikalender zum Eintragen der Lösungen

Literatur
Beutelsbacher, Albrecht/ Wagner, Marcus: Wie man durch eine Postkarte steigt; Herder 2010

➔ Kopiervorlage im Anhang

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Grundschule / Mathematik ist mehr als Rechnen – 30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

5 Welche Figur ist die größte?

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

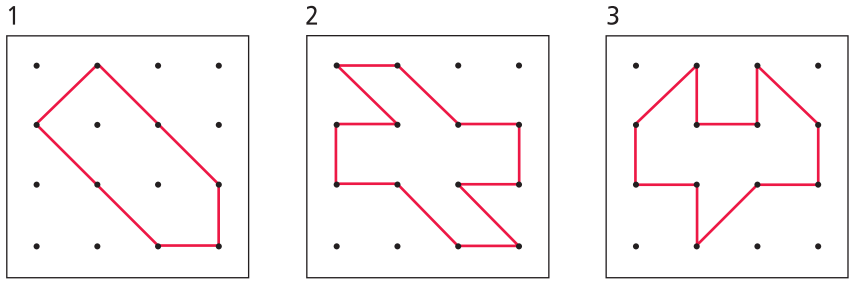
Anforderung
Längen, Flächen und Körper bezüglich ihrer Abmessungen vergleichen

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Klassenstufe
3 bis 4

Material
– Geobretter
– Gummis

1 Spanne die Figur auf dem Geobrett. Welche der drei Figuren hat die größte Fläche?
2 Beschreibe, wie du das herausgefunden hast.



Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es um das Vergleichen und anschließende Bestimmen von Flächeninhalten ebener Figuren auf dem Geobrett. Um herauszufinden, welche Figur den größten Flächeninhalt hat, bietet sich neben dem Berechnen des Flächeninhalts vor allem der direkte Vergleich über das Zerlegen in gleichschenklige Dreiecke oder in Quadrate an. Dabei ist zu beachten, dass die Quadrate in Figur 1 größer sind als die Quadrate in Figur 2 und 3. Zerlegt man in gleichschenklige Dreiecke, erhält man in den Figuren 1 und 3 jeweils neun Dreiecke, in Figur 2 zehn.
Eine andere Möglichkeit wäre der Vergleich der von den Figuren nicht bedeckten Flächen des Geodreiecks. Auch hier ergeben sich gleichschenklige Dreiecke: Bei Figur 1 und 3 bleiben jeweils neun Dreiecke frei, bei Figur 2 nur acht.
Im Mittelpunkt der Aufgabe steht das Erkennen, dass große Figuren in kongruente kleinere Figuren (am besten in Dreiecke oder Quadrate) zerlegt werden können, um den Flächeninhalt miteinander zu vergleichen. Mithilfe des Geobrettes, auf dem die zu vergleichenden Flächen gespannt werden, können unterschiedliche Lösungsideen entwickelt und ausprobiert werden.

Wie kann man vorgehen?

In Partnerarbeit versuchen die Schüler die Aufgabe selbständig zu lösen. Jede Gruppe benötigt drei Geobretter. Das Geobrett bietet eine entscheidende Lösungshilfe, da auf ihm das Raster besonders deutlich hervortritt und sich das Zerlegen in kleinere Flächen geradezu aufdrängt. Der Vergleich ist allerdings nur dann möglich, wenn alle drei Figuren nebeneinander gelegt werden können.
Bei der Auswertung im Gesprächskreis stehen das unterschiedliche Vorgehen der Schüler und das geschickte Zerlegen der Figuren im Mittelpunkt. Eine Schwierigkeit bei der Bearbeitung kann sich aus dem Verwechseln der Begriffe Umfang und Flächeninhalt ergeben. In diesem Falle macht es Sinn, die Arbeitsphase kurz zu unterbrechen, um die Bedeutung der Begriffe im Klassenverband zu besprechen. Hieraus ergibt sich unter Umständen ein wertvoller Gesprächsanlass: Ist der Größenvergleich von Flächen über den Umfang überhaupt möglich?
Zur Differenzierung könnten eigene Figuren entwickelt und deren Flächeninhalt bestimmt werden.

6 Bruchvorstellungen

Faltet die Quadrate auf verschiedene Weise so, dass alle entstandenen Teile gleich groß sind. Zerschneidet sie und klebt sie auf.

Beispiel:

Findet für die entstandenen Anteile passende Bezeichnungen.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Arithmetische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen

Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
4 bis 5

Material
- quadratisches Faltpapier
- Schere
- Kleber
- Plakatpapier

Worum geht es?

Die Schüler zerlegen ein immer gleiches Ganzes unterschiedlich in gleich große Anteile. Durch Ausprobieren finden sie viele mögliche Lösungen und bekommen dadurch ein propädeutisches Verständnis für Anteile als Vorbereitung von Bruchzahlen. Das Vorwissen der Schüler wird aktiviert. Sie wissen, dass man ein Ganzes in zwei Hälften teilen kann. Sie kennen den Begriff Hälfte oder ein Halbes. Einige Schüler können dieses wahrscheinlich auch schon mathematisch als Bruchzahl darstellen. Ausgehend davon überlegen sie, wie die Anteile der anderen zerschnittenen Quadrate benannt werden können. Da die Anteile jeweils gleich groß sind, entstehen Stammbrüche.
Die Schüler teilen die Quadrate unterschiedlich. Es entstehen nicht nur neue Quadrate, sondern auch Dreiecke oder Rechtecke bzw. Streifen.

Wie kann man vorgehen?

Zu Beginn der Stunde faltet die Lehrkraft oder ein/e Schüler/in ein Quadrat aus Papier so, dass zwei Hälften entstehen. Die Teile werden an der Tafel befestigt. Gemeinsam wird nach der Bezeichnung für die Teile gesucht. Die Ergebnisse werden an der Tafel notiert (z. B. Hälfte, ein Halbes, Bruchschreibweise).
Nun werden die Schüler/innen aufgefordert, andere Möglichkeiten zu finden, ein Quadrat in gleich große Teile zu zerlegen. Dabei kommt es besonders auf sorgfältiges Arbeiten an, damit die Ergebnisse nicht verfälscht werden. Die Schüler/innen arbeiten in Gruppen. Jede Gruppe klebt ihre Ergebnisse auf ein Plakat und beschriftet dieses mit den gefundenen Bezeichnungen.
Die Präsentation der Ergebnisse am Ende bietet den Schüler/innen die Möglichkeit, ihre Ergebnisse den Mitschülern vorzustellen, sie miteinander zu vergleichen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu besprechen. Der Zusammenhang zwischen der arithmetischen Bruchvorstellung und der geometrischen Veranschaulichung durch Falten kann hier noch einmal explizit herausgearbeitet werden.

7 Terrasse mit Obstbaum

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

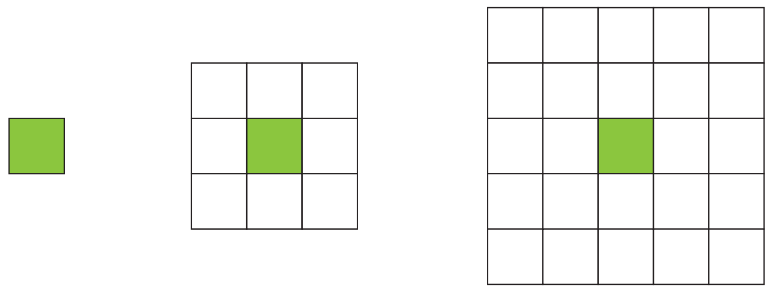
Anforderung
Zahl- und Rechenvorstellungen mit Hilfe geometrischer Vorstellungen entwickeln

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen

Klassenstufe
4 bis 6

➔ Kopiervorlage im Anhang

Familie Lohmann will mit quadratischen Steinplatten eine neue Gartenterrasse verlegen. In der Mitte steht ein alter Obstbaum, der an dieser Stelle auch stehen bleiben soll. Sie verlegen also die Platten immer um den Baum herum. Insgesamt kaufen sie 250 Platten.



a Wie geht es weiter?
b Wie viele Runden können sie mit den 250 Platten legen?
c Wie wächst die Gesamtanzahl der verlegten Platten? Beschreibe deine Beobachtungen.
d Wie wächst die Anzahl der jeweils neu verlegten Platten? Beschreibe deine Beobachtungen.
e Kann der Baum in der Mitte stehen, wenn man eine Seitenlänge von 16 Platten hat? Begründe.

Worum geht es?
In dieser Aufgabe werden zwei verschiedene Zahlenfolgen fortgesetzt. Bei der Gesamtzahl der Platten handelt es sich um das „Quadrat der Anzahl pro Seite minus eins“, da die Stelle mit dem Baum nicht besetzt wird. Bei den neu verlegten Platten entsteht die 8er Reihe, da bei jeder neuen Runde acht Platten dazu kommen. Für die Lösung der Aufgabe sind unterschiedliche Lösungswege denkbar. In einer Tabelle werden die neu verlegten und die insgesamt verlegten Platten aufgeschrieben. Da die ersten drei Terrassenflächen zeichnerisch vorgegeben sind, kann eine Lösung durch Abzählen oder gezieltes Überlegen erreicht werden. Wenn die Schüler die Platten für die folgenden vier Terrassenflächen berechnen, können sie auch hier unterschiedliche Lösungsstrategien anwenden. Sie können die nächsten Terrassenflächen zeichnen und auszählen. Sie können diese Aufgabe aber auch durch gezieltes Überlegen lösen.
Angeregt durch die Frage: „Wie wächst die Anzahl der Platten? Beschreibe deine Beobachtungen.“ befassen sie sich mit der Gesetzmäßigkeit der neu hinzukommenden Platten. Es sind in jeder Runde acht Platten mehr (also 8, 16, 24, 32, 40, …). Auch für die Berechnung der Gesamtplatten ergeben sich verschiedene Lösungswege: Es ist immer die Anzahl der Platten aus der vorherigen Terrassenfläche plus der neu verlegten (8, 24, 48, 80, 120, 168, 224 …).
Andere Schüler erkennen bereits, dass es sich bei der Gesamtzahl der Platten immer um das „Quadrat der Seitenanzahl minus einer Fliese“ handelt (3 mal 3 minus 1; 5 mal 5 minus 1; 7 mal 7 minus 1 usw.). Da die Anzahl der Fliesen pro Seite immer ungerade sein muss, sind es die Quadrate der ungeraden Zahlen minus eins. Die Beschreibung des Lösungsweges gibt den Schülern Raum, ihre individuellen Lösungswege darzustellen, zu begründen und Lösungsstrategien sichtbar werden zu lassen.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst ist es sinnvoll, die Aufgabe mit den Schülern gemeinsam zu lesen und eventuelle Fragen zu besprechen. Damit die Schüler anschließend selbständig arbeiten können, ist eine sorgfältige gemeinsame Erarbeitung der Problemstellung wichtig. Je nach Klassenstufe kann durch eine erklärende Zeichnung an der Tafel oder entsprechendes Material (Wendeplättchen, quadratische Plättchen aus Holz oder Moosgummi) im Stuhlkreis die Aufgabenstellung anschaulich gemacht werden. Besonders die Begriffe „neu hinzukommende Platten“ und „Gesamtplatten“ müssen verstanden sein.

Bei der anschließenden Arbeit sollten Zeichnungen am besten auf Karopapier entstehen, da es die Übersicht spürbar erleichtert. Unter Umständen kann auch das konkrete Legen von kleinen Quadraten um einen Baum (bzw. ein leeres Quadrat) zur anschaulichen Unterstützung und Vertiefung des Verständnisses hilfreich sein.

Beim Ausfüllen der Tabelle erkennen und nutzen die Schüler die Gesetzmäßigkeiten der Zahlenfolgen. Es ist wichtig, bei dieser Arbeitsphase zunächst auf Einzelarbeit zu bestehen. Nur so ist gewährleistet, dass wirklich jeder Schüler einen eigenen Zugang zu der Aufgabe findet. Im weiteren Verlauf ist das Austauschen über die gemachten Beobachtungen sinnvoll.

Im anschließenden Unterrichtsgespräch stehen die verschiedenen Lösungsstrategien und die Bildungsregeln der Zahlenfolgen im Vordergrund. Alle Schüler erhalten die Gelegenheit, sich gegenseitig ihre Beobachtungen und Lösungswege mitzuteilen. Dabei werden die Denk- und Lösungswege von anderen nachvollzogen und diskutiert.

8 Quadrat-Puzzle

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Arithmetische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln; Zusammenhänge erkennen

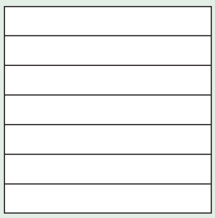
Klassenstufe
3 bis 4
JÜL-geeignet

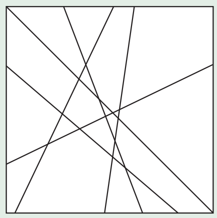
Material
– quadratisches Faltpapier
– Lineal
– Bleistift

Zerlege ein Quadrat mit Hilfe von sechs Strecken in ein Puzzle mit möglichst vielen Teilen.

Wie viele Flächen entstehen?
Wer findet die meisten Flächen?

Worum geht es?
Der Mathematikunterricht bietet vielfältige Möglichkeiten, geometrisches und arithmetisches Denken in einen wechselseitigen Zusammenhang zu stellen. Von einer Fragestellung aus dem Bereich der Geometrie ausgehend bietet diese Aufgabe Möglichkeiten, dabei arithmetische Entdeckungen zu machen und weiterführende Überlegungen anzustellen. Eine sinnvolle Verbindung beider Inhaltsbereiche ist das zentrale Anliegen dieser Aufgabe.
Mit Hilfe von sechs Strecken soll das vorgegebene Quadrat in Teilfiguren zerlegt werden. Das Quadrat wird also nicht wirklich zerschnitten, sondern lediglich zeichnerisch unterteilt. Wichtig ist, dass die Strecken von Rand zu Rand des Quadrates gehen oder darüber hinausragen.
Zuerst untersuchen wir experimentell die Anzahl der entstehenden Flächen in Abhängigkeit von der Anzahl der Schnittpunkte der sechs Strecken. Das Quadrat wird in umso mehr Teile zerlegt, je mehr Schnittpunkte der Geraden es gibt. Am wenigsten Teilflächen entstehen, wenn alle Strecken parallel zu einander verlaufen. Die meisten Teilflächen gibt es, wenn jede Strecke alle anderen schneidet und sich in jedem Schnittpunkt jeweils nur 2 Strecken treffen.





Mit sechs Strecken entstehen genau sieben Flächen unter der Bedingung, dass sich keine Strecken schneiden. Maximal können 22 Flächen entstehen, in diesem Fall schneidet jede Strecke jeweils alle anderen Strecken.

Anzahl der Schnittpunkte	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12		15
Anzahl der Flächen	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19		22

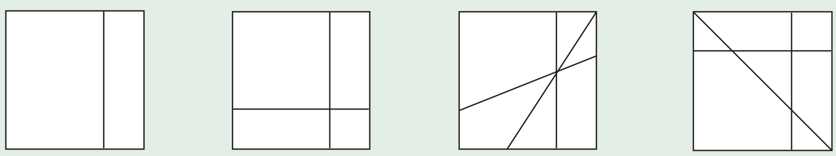
Nun nehmen wir eine andere Anzahl von Strecken zur Zerlegung. Wir untersuchen, wie die maximale Anzahl von Flächen von der Anzahl der Strecken abhängt. Dafür gibt es eine Formel: wenn x die Anzahl der gezeichneten Strecken ist, dann gilt für die maximale Anzahl der Flächen $x \cdot (x + 1) : 2 + 1$. Natürlich entstehen weniger Flächen, wenn sich eben nicht alle Strecken schneiden (siehe erste Tabelle).

Anzahl der verwendeten Strecken	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maximale Anzahl der Flächen	2	4	7	11	16	22				

Zu erkennen, dass es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der entstehenden Flächen und der Anzahl der entstandenen Streckenschnittpunkte gibt, ist für die Kinder eine herausfordernde Aufgabe. Es geht aber auf keinen Fall darum, das Bildungsgesetz der hier entstehenden Zahlenfolge, also die oben erwähnte Formel, zu finden.

Wie kann man vorgehen?
Die Aufgabenstellung ist so gewählt, dass jeder Schüler seinen Fähigkeiten entsprechend auf seinem Entwicklungsniveau arbeiten kann, denn die Gestaltung ist offen, die Differenzierung ergibt sich natürlich. Die Schüler benötigen ausreichend Zeit zum Experimentieren und Erforschen.
Im Gesprächskreis wird den Schülern die Aufgabe vorgestellt. Begriffe wie waagerecht, senkrecht, diagonal, parallel werden dabei im Unterrichtsgespräch besprochen. Anschließend arbeiten die Schüler in ihren Tischgruppen nach dem Prinzip „ich – du – wir". Die Schüler beginnen in Einzelarbeit, um den Freiraum zu haben, eigene Strategien zu entwickeln und auszuprobieren. Dem schließt sich ein Erfahrungsaustausch innerhalb der Tischgruppe an: Die Schüler treten in Kommunikation: „Was ist bei dir anders und warum?"
Im auswertenden Unterrichtsgespräch stellen die einzelnen Tischgruppen ihre Ergebnisse vor: Die Anzahl der gefundenen Flächen variiert. Worin unterscheiden sie sich (Dreiecke, Vielecke)?
Es folgt eine Phase in der die Schüler ihre Muster sortiert nach Dreiecken und Vielecken farbig gestalten. Das Unterrichtsgeschehen wird zugespitzt auf die Frage nach der Anzahl der Flächen: Jede Tischgruppe präsentiert jeweils ein Beispiel minimaler und maximaler Anzahl von Flächen an der Tafel. Im Gespräch werden die Unterschiede herausgearbeitet: Lage der Strecken (schneiden sie sich oder liegen sie parallel?), Schnittpunkte (wie viele Strecken schneiden sich in einem Punkt?).

Weiterarbeit
Weiter geht es mit der Fragestellung: Wie viele Flächen gibt es maximal? Dazu wird die Anzahl der zu verwendenden Strecken langsam erweitert. Es bietet sich an, die Aufgabe zeichnerisch zu lösen.
Bei ein oder zwei Strecken sind die Lösungen schnell gefunden. Ab drei Strecken wird die Suche nach der maximalen Anzahl der entstehenden Flächen schon schwieriger. Die Schüler können aber durch zeichnerisches Experimentieren den Zusammenhang zur Anzahl der Schnittpunkte entdecken. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle festgehalten.
Selbstverständlich kann man die Formel hier nicht herleiten, aber man kann mit den Schülern Indizien finden, wenn man schrittweise zu einer optimalen Konstellation von n Strecken die nächste Strecke hinzulegt und guckt, wie viele neue Flächenstücke entstehen. Man untersucht dabei den „Anstieg" der Zahl der Flächenstücke, also die Differenzenfolge.



Anzahl der Strecken	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maximale Anzahl der Flächen	2	4	7	11						

9 Neue Fliesen

Ein Bad soll neu gefliest werden. Für den rechteckigen Fußboden wurden quadratische Fliesen gekauft. Es gibt 36 helle und 30 dunkle Fliesen.

Die dunklen Fliesen sollen die hellen einrahmen. Ist das möglich?

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Form und Veränderung

Anforderung
Den Zusammenhang von Umfang und Flächeninhalt erkennen und beschreiben.

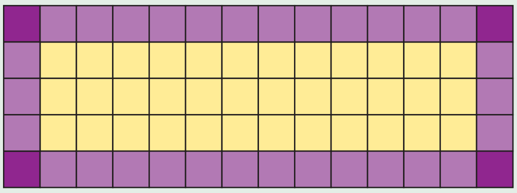
Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren)

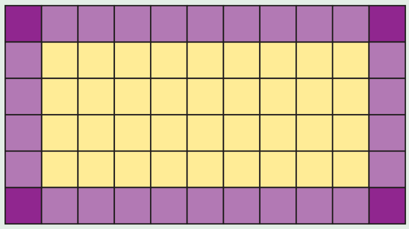
Klassenstufe
3 bis 4

Material
– Faltpapier

Worum geht es?

Der Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang ist das zentrale Thema dieser Aufgaben. Da der zu fliesende Raum rechteckig ist, müssen sowohl die zu umrahmende Fläche der 36 hellen Fliesen als auch der Rahmen aus 30 dunklen Fliesen ein Rechteck ergeben. Der Flächeninhalt von 36 Fliesen wird in die beiden Faktoren Länge und Breite zerlegt: 1 · 36, 2 · 18, 3 · 12 sowie 9 · 4 (6 · 6 wäre ein Quadrat).
Um die Anzahl der jeweils benötigten Randfliesen zu bestimmen, werden die vier Seiten der hellen Fliesen addiert und um vier Fliesen für die Ecken ergänzt.
Für die Umrandung des 1 · 36-Rechtecks bräuchte man demnach 36 + 36 + 1 + 1 + 4 = 78 Fliesen, für die Einrahmung des 2 · 18-Feldes 18 + 18 + 2 + 2 + 4 = 44 dunkle Fliesen. Da nur 30 dunkle Fliesen vorhanden sind, scheiden diese beiden Möglichkeiten aus (abgesehen davon, dass es wohl kaum Bäder mit so ungewöhnlichen Maßen geben dürfte).
Für die Umrandung des 3 · 12-Feldes bräuchte man 12 + 12 + 3 + 3 + 4 = 30 und für das 9 · 4-Feld 9 + 9 + 4 + 4 + 4 = 30 dunkle Fliesen.





Es gibt also zwei unterschiedliche Lösungen.
Denkbar wäre auch die Möglichkeit eines kleineren Flächeninhalts, denn es ist ja nicht explizit Bedingung, dass alle Fliesen verwendet werden müssen.

Wie kann man vorgehen?

Da die Schüler in der Regel in Klasse 3/4 noch nicht über die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt verfügen, kommt für sie das handelnde und systematische Probieren als Lösungsweg in Frage. Dazu sollte den Schülerinnen und Schülern eine ausreichende Zahl an Quadraten aus Pappe oder Papier zur Verfügung gestellt werden, die sie selbst entsprechend einfärben können. Falls vorhanden, kann die Situation auch mit echten Fliesen oder anderen Materialien (z. B. Steckwürfeln) simuliert werden. Dabei können die Schüler vielfältige Erfahrungen machen: Um eine einzelne helle Fliese zu umranden, benötigt man 8 dunkle Fliesen (1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8). Um zwei Fliesen zu umranden, benötigt man zehn dunkle Fliesen (2 + 2 + 1 + 1 + 4 = 10) usw. Sie entdecken, dass jeweils vier Fliesen für die Ecken dazu kommen müssen. Für vier Fliesen in einer Reihe benötigt man 14 Fliesen (4 + 4 + 1 + 1 + 4 = 14), für vier Fliesen in der 2 · 2-Anordnung jedoch nur 12 (2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12). Es wird klar, dass die Zahl der Umrandungsfliesen von der Anordnung der Fliesen in der Mitte abhängt, obwohl der Flächeninhalt gleich bleibt. Je „kompakter" die Aufteilung ist, desto weniger dunkle Fliesen benötigt man. Bei einer quadratischen Anordnung werden die wenigsten Randfliesen benötigt.
Aufgrund der wichtigen Handlungserfahrungen sollten die Schüler in Einzelarbeit genügend Zeit zum Ausprobieren haben, bevor sie ihre Beobachtungen in Partner- oder Gruppenarbeit weitergeben. In einer Auswertungsphase mit allen Schülern werden Vorgehensweise und gemachte Beobachtungen beschrieben und reflektiert.

10 Zahlenfeld

Erkunde das abgebildete Zahlenfeld.
Was fällt dir auf?

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Eigene Vorgehensweise beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren.

Klassenstufe
3 bis 4
JÜL-geeignet

➔ Kopiervorlage im Anhang

Worum geht es?

Erkundungsaufgaben an Zahlenfeldern sind klassische Forscheraufgaben, bei denen die Schüler versuchen, Beziehungen zwischen den Zahlen zu finden. Diese beruhen auf der strukturierten arithmetischen und geometrischen Anordnung der Zahlen.
In dem oben vorgestellten Zahlenfeld liefert das von Zeile zu Zeile Auf- bzw. Absteigen der Zahlen die Grundlage für diverse Entdeckungen, die vor allem das Bilden und Vergleichen von Summen und Differenzen betreffen:

- Nebeneinanderstehende Zahlen haben einen Abstand von eins.
- In der 1. Reihe werden die Zahlen von links nach rechts immer um eins größer, in der 2. Reihe von rechts nach links. Dieses Muster wiederholt sich, so dass die Zahlen in der 3. Reihe wieder von links nach rechts, in der 4. Reihe von rechts nach links um eins größer werden („Slalommuster").
- Untereinanderstehende Zahlen haben in der 1./2. Reihe die Summe neun, in der 2./3. Reihe die Summe 17, in der 3./4. Reihe die Summe 25 (Unterschied jeweils $2 \cdot 4 = 8$), die Summen sind dabei immer ungerade.
- Nebeneinanderstehende Zahlen haben immer ungerade Summen.
- Diagonal übereinanderstehende Zahlen der 1./2. Reihe haben die Summen acht (links oben nach rechts unten) und zehn (rechts oben nach links unten), der 2./3. Reihe 18 bzw. 16, der 3./4. Reihe 24 bzw. 26.
- Die Summe von einem Vierer-Ausschnitt ist für die 1./2. Reihe immer 18, für die 2./3. Reihe immer 34 und für die 3./4. Reihe immer 50 (Unterschied jeweils $4 \cdot 4 = 16$).
- Die Summe der 1. Reihe ist zehn, der 2. Reihe 26, der 3. Reihe 42, der 4. Reihe 58, der Unterschied jeweils ($4 \cdot 4 =$) 16.
- Die Summe der vier Spalten ist immer 34.
- Die Gesamtsumme aller Zahlen im Feld ist ($34 \cdot 4 =$) 136.

Jeder Schüler beschreibt Strukturen, die seinem persönlichen Erfahrungs- und Leistungsstand entsprechen, dadurch ergibt sich eine natürliche Differenzierung. Damit die Schüler weitere Anregungen erhalten, die über das eigene Vorwissen hinausgehen, sind Austausch und Reflexion der gemachten Entdeckungen von zentraler Bedeutung.

Wie kann man vorgehen?

Zu Beginn wird das Zahlenfeld vorgestellt und wichtige Begriffe gemeinsam geklärt: Reihe (= Zeile), Spalte, senkrecht, waagerecht, diagonal, Summe, Differenz. Damit die Schüler Begriffe für das Beschreiben ihrer Beobachtungen parat haben, hilft eine Auflistung der Begriffe an der Tafel als „Wortspeicher".
Vor der gesamten Klasse werden zwei bis drei Entdeckungen am Zahlenfeld gezeigt, beschrieben, erklärt und nachvollzogen, damit wirklich alle Kinder verstehen, worum es geht.
Anschließend kleben oder zeichnen die Schüler das Zahlenfeld in ihr Mathematik- oder Forscherheft. Dann machen sie sich mit ausreichend Zeit an die Erkundung des Zahlenfeldes und halten ihre Entdeckungen möglichst schriftlich fest.
Eine wichtige Phase ist die abschließende Präsentation der Ergebnisse vor der Klasse. Dazu sollte ein großes Zahlenfeld an der Tafel benutzt werden. Gleiche Beobachtungen werden bestätigt, Neues wird ergänzt. Der Lehrer achtet auf genaue Formulierungen und unterstützt das Verwenden der zuvor erarbeiteten Begriffe.

11 Zahlen-Steckbrief

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Zahlen unter den verschiedenen Zahlaspekten auffassen und darstellen

Allgemeine mathematische Kompetenz
DARSTELLEN: Geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen

Klassenstufe
1 bis 4;
JÜL-geeignet

Gestalte ein Blatt zu deiner Lieblingszahl.
Stelle sie auf unterschiedliche Weise dar.

Worum geht es?
Die Schüler setzen sich bei der Darstellung ihrer Lieblingszahl mit unterschiedlichen Zahlaspekten auseinander. Sie finden dazu Bilder, Gruppen von Aufgaben oder auch kleine Geschichten. Das individuelle Verständnis mathematischer Grundstrukturen wird dabei sichtbar und kann Anlass für Gespräche und weitere Lernprozesse sein. Die Erstellung eines Steckbriefes eignet sich für jahrgangsübergreifendes Lernen, kann vielfältig variiert werden und beinhaltet eine natürliche Leistungsdifferenzierung.

Wie kann man vorgehen?
Zu Beginn sollte besprochen werden, was ein Zahlen-Steckbrief ist. Es kann zum Beispiel Bezug zu Steckbriefen von Personen und Tieren genommen werden, um dann zu überlegen, wie ein Zahlen-Steckbrief aussehen könnte. Das Erstellen eines exemplarischen Zahlen-Steckbriefes bietet eine Möglichkeit, die Kinder in die selbstständige Arbeit zu entlassen.
Durch die individuelle Auswahl der Zahl arbeitet jeder Schüler in dem Zahlenraum, der ihn herausfordert.

Folgende Impulse können den Schülern weitere Anregungen geben:
– Zeichne das Zahlbild.
– Schreibe deine Zahl als Wort.
– Zeichne die Zahl mit Geldscheinen und Münzen auf.
– Zerlege die Zahl in ihre Stellenwerte.
– Suche die Nachbarzahlen/Zehnernachbarn.
– Ergänze die Zahl auf 10/100/1000/10 000/…
– Zeichne die Zahl auf einem Zahlenstrahl.
– Stelle deine Zahl im Hunderter-/Tausenderfeld dar.
– Suche Plus-/Minusaufgaben mit deiner Zahl als Ergebnis.
– Suche Mal-/Geteiltaufgaben mit deiner Zahl als Ergebnis.
– Finde Aufgabenfamilien zu deiner Zahl.
– Runde deine Zahl auf Zehner/Hunderter.
– Wähle beliebige Zahlen und vergleiche sie mit deiner Zahl.
– Schreibe eine Sachaufgabe, in der deine Zahl vorkommt.
– Stelle deine Zahl mit Material (z. B. goldenes Perlenmaterial) dar.

Während der Arbeitszeit sind Austausch und Kommunikation mit anderen ausdrücklich erwünscht. Dies macht neugierig auf die Arbeiten der anderen, regt zum Nachfragen und Nachahmen an und erweitert das Spektrum eigener Ideen. Hilfreich ist das Bereitstellen von Materialien, die den Kindern bei der Darstellung helfen, die aufgeklebt oder auch abgezeichnet werden können.
Das Thema Zahlensteckbrief kann weitreichend variiert werden: Es kann an den Zahlenraum (natürliche Zahlen bis 10/20/100/1000, gebrochene Zahlen, …), an aktuelle Unterrichtsthemen usw. angepasst werden. Es können verbindliche Vorgaben erfolgen oder die Kinder wählen die Inhalte selbst aus. Auf jeden Fall sollten die Kinder angeregt werden, eigene Ideen zu ihrer Zahl zu finden (z. B. künstlerische Umsetzung, Märchenzahl, Fremdsprachen, Umwelt, Schreiben einer Geschichte …).
Die Präsentation der Steckbriefe kann als Ausstellung, als Zusammenstellung aller Schülerarbeiten in Buchform oder auch im Rahmen einer persönlichen Vorstellungsrunde erfolgen.

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Grundschule / Mathematik ist mehr als Rechnen – 30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

12 Eicheln sammeln

Ein Eichhörnchen begann am Montag Eicheln zu sammeln.
Am Dienstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Montag.
Am Mittwoch sammelte es drei Eicheln mehr als am Dienstag.
Am Donnerstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Mittwoch.
Am Freitag sammelte es drei Eicheln mehr als am Donnerstag.
Am Freitag hatte es 50 Eicheln.
Wie viele Eicheln hat das Eichhörnchen jeden Tag gesammelt?

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Klassenstufe
3 bis 4
JÜL-geeignet

➔ Kopiervorlage im Anhang

Worum geht es?

Es handelt sich um eine typische Aufgabe aus dem Kompetenzbereich Problemlösen. Sie zielt auf das Verständnis von Zusammenhängen und auf das sachbezogene logische Arbeiten. Anders als bei üblichen Textaufgaben gibt es keinen vertrauten, vorgegebenen Rechenweg, mit dem sich die Aufgabe lösen lässt, sondern es muss nach einem passenden Lösungsweg gesucht werden.
Eine der einfachsten und natürlichsten Lösungsstrategien ist das Probieren. Um zu wissen, wie viele Eicheln das Eichhörnchen an jedem Tag gesammelt hat, muss man erst einmal herausbekommen, wie viele es am Montag waren. Dazu kann mit einer Vermutung begonnen werden. Bei der Überprüfung stellt man fest, ob es zu wenig/zu viele Eicheln sind, wenn die Gesamtzahl der Eicheln unter/über den vorgegebenen 50 liegt. Die Vermutung wird nach oben/unten korrigiert, wieder überprüft und wieder verbessert. Die Schüler nähern sich dem Ergebnis, bis es irgendwann stimmt. Die Form der Darstellung, z. B. die Verwendung einer Tabelle, spielt eine wesentliche Rolle zur Entwicklung eines systematischen Vorgehens.

Tag	gesammelte Eicheln	gesammelte Eicheln	gesammelte Eicheln	gesammelte Eicheln
Montag	2	3	5	4
Dienstag	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	5 + 3 = 8	4 + 3 = 7
Mittwoch	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9	8 + 3 = 11	7 + 3 = 10
Donnerstag	8 + 3 = 11	9 + 3 = 12	11 + 3 = 14	10 + 3 = 13
Freitag	11 + 3 = 14	12 + 3 = 15	14 + 3 = 17	13 + 3 = 16
insgesamt	40 (zu wenig)	45 (zu wenig)	55 (zu viel)	50 (stimmt)

Selbstverständlich lässt sich das auch mathematisch als Gleichung mit einer Unbekannten ausdrücken: $50 = x + x+3 + x+3+3 + x+3+3+3 + x+3+3+3+3 = 5x + 10 \text{ mal } 3 = 5(x+2 \text{ mal } 3)$; daraus folgt: $10 = x + 6$ ergo ist $4 = x$. Diese Form der Lösung ist für die Grundschule weder erwartet noch angestrebt. Dennoch ist es durchaus möglich, dass besonders interessierte Kinder einen solchen Ansatz finden.

Wie kann man vorgehen?

Wichtige Voraussetzung für das Verständnis ist das genaue Lesen und Verstehen der Aufgabe. Eventuell kann der Sachverhalt durch entsprechendes Legen mit Plättchen veranschaulicht werden.
In Einzelarbeit entwickeln die Schüler Lösungsversuche und fertigen dabei Skizzen oder Tabellen an. Schüler, die gar keinen Einstieg in die Aufgabe finden, können mit einer tabellarischen Aufstellung der Wochentage unterstützt werden. Experimentieren und Probieren braucht Zeit. Schließlich stellen sich die Schüler gegenseitig ihre Ergebnisse vor, indem sie ihre Lösungen auf Plakaten präsentieren.

Weiterarbeit

Die gefundene Lösungsstrategie für diese Aufgabe lässt sich auf Aufgaben mit einer veränderten Anzahl von insgesamt gesammelten Eicheln oder einem veränderten Zuwachs anwenden. Leistungsstärkere Schüler könnten nach einer allgemein gültigen Lösungsstrategie suchen.

13 Mal-Plus-Haus

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

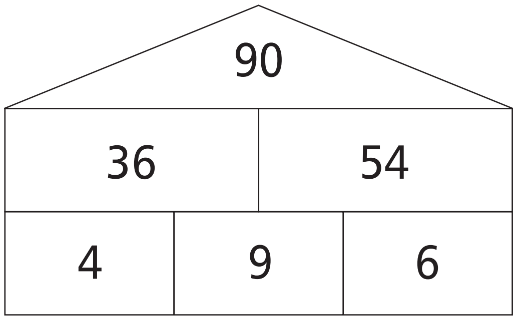
Anforderung
Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen und in verschiedenen Situationen anwenden

Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
3 bis 4

➔ Kopiervorlage im Anhang

So ist ein Mal-Plus-Haus aufgebaut:

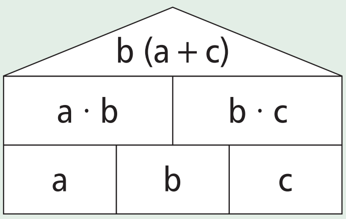


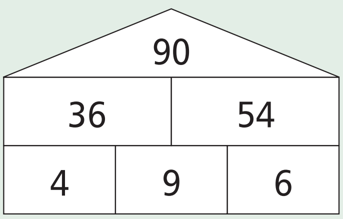
1 Suche dir drei verschiedene Zahlen zwischen 1 und 9 aus und verwende sie als Kellersteine des Mal-Plus-Hauses.
2 Wie viele verschiedene Häuser findest du mit deinen drei Kellersteinen?
3 Was fällt dir auf? Schreibe deine Beobachtungen auf.
4 Vergleiche deine Ergebnisse mit den anderen Kindern.
5 Was fällt euch auf? Warum ist das so? Schreibt eure Vermutungen auf.

Worum geht es?
Beim Mal-Plus-Haus handelt es sich um ein substanzielles Aufgabenformat, das ähnlich wie die dreistöckigen Zahlenmauern aufgebaut ist. Es werden jedoch neben den additiven vor allem multiplikative Operationen durchgeführt. Je nachdem, an welcher Stelle im Haus die Zahlen vorgegeben sind, werden für die Ermittlung der fehlenden Zahlen neben der Multiplikation und der Addition auch die beiden Umkehroperationen Subtraktion und Division verlangt. Mit dem Mal-Plus-Haus kann besonders das Einmaleins flexibel und beziehungshaltig geübt werden.
Das Mal-Plus-Haus besteht aus drei Etagen. Die drei Zahlen im „Keller" werden jeweils paarweise mit der benachbarten Zahl multiplikativ verknüpft und die erhaltenen Produkte in die beiden Felder der „Wohnung" darüber eingetragen. Die Addition der beiden „Wohnungszahlen" liefert die „Dachzahl".

Der Aufbau des Hauses folgt dem Distributiv- (Verteilungs-) Gesetz:

$ab + bc = b \cdot (a + c)$





Die Dachzahl ist immer ein Vielfaches der mittleren Kellerzahl. Die mittlere Kellerzahl wird mit der Summe der beiden äußeren Kellerzahlen multipliziert. Dieser Zusammenhang wird deutlicher, wenn die beiden Faktoren bei der Berechnung der rechten Wohnungszahl getauscht werden ($6 \cdot 9$ statt $9 \cdot 6$). Diese Beziehung kann von vielen Kindern selbstständig entdeckt werden.

Mögliche Entdeckungen der Kinder anhand der Forscheraufträge:

Zu 1 und 2:
- Es lassen sich sechs verschiedene Häuser finden.

Zu 3:
- Jeweils zwei Dachsteine kommen doppelt vor und zwar bei gleichen mittleren Kellerzahlen.
- Je größer die mittlere Kellerzahl ist, desto größer ist auch die Dachzahl.
- Die mittlere Kellerzahl steckt in beiden Wohnungszahlen, da sie ein Faktor der beiden Zahlen ist.
- Vertauscht man die linke und rechte Kellerzahl, bleibt die Dachzahl gleich (Kommutativgesetz).
- Wenn man die linke und die rechte Kellerzahl addiert und mit der mittleren Kellerzahl multipliziert, kommt die Dachzahl heraus.

Zu 4 und 5:
Welche drei Kellerzahlen die Schüler auch gewählt haben, die allgemeinen Entdeckungen der Schüler sind die gleichen und sie erkennen dabei die Regelhaftigkeit:
- Wenn die linke oder die rechte Kellerzahl z. B. um eins größer wird, wird die Dachzahl um die mittlere Kellerzahl größer (Distributivgesetz).
- Wenn beide Außenzahlen im Keller z. B. um eins größer werden, wird die Dachzahl um das Doppelte der mittleren Kellerzahl größer (Distributivgesetz).
- Wenn die linke Kellerzahl z. B. um eins größer und die rechte Kellerzahl um eins kleiner wird, bleibt die Dachzahl gleich (Distributivgesetz, Konstanz der Summe).
- Wenn die mittlere Kellerzahl z. B. um eins größer wird, wird die Dachzahl um das Doppelte der mittleren Kellerzahl größer (Distributivgesetz).

Wie kann man vorgehen?
Schüler, die das Übungsformat „Zahlenmauer" kennen, dürften mit der Handhabung des Mal-Plus-Hauses keine Schwierigkeiten haben. Dennoch sollte zu Beginn der Stunde der Aufbau noch einmal anhand einiger Beispiele an der Tafel besprochen werden. Eventuell wird zunächst ein Angebot an Aufgaben bearbeitet, die zur Verdeutlichung der Aufgabenstruktur die Kellerzahlen vorgeben und deren Wohnungs- und Dachzahlen einfach errechnet werden.
Danach können dann die Forscheraufträge bearbeitet werden und die Ergebnisse im Forscherheft dargestellt werden. Wichtig ist, dass die Kinder ihre Beobachtungen und Begründungen beschreiben, damit sie sie im Sinne des Argumentierens später mit denen ihrer Klassenkameraden vergleichen und auswerten können.
Als weiterführende Aufgabe oder als Lernzielkontrolle könnte man die Schüler bei einer vorgegebenen Dachzahl im Mal-Plus-Haus Vermutungen über die mittlere Kellerzahl äußern lassen. Dies gelingt natürlich nur, wenn die Schüler die mathematischen Zusammenhänge innerhalb des Hauses erfasst haben – bei gesicherter Erkenntnis werden sie zielgerichtet nach entsprechenden Teilern der Dachzahl suchen.

14 Zahlenmuster am Taschenrechner

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen

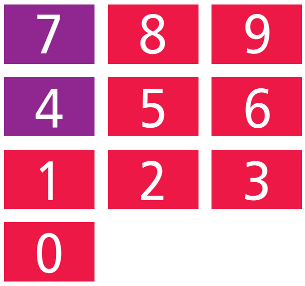
Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
3 bis 4

Material
– Taschenrechner

Bilde aus zwei Ziffern, die auf dem Taschenrechner genau übereinander stehen, eine Zahl und subtrahiere von ihr die Umkehrzahl (z. B. 74 – 47).

Wie lautet das Ergebnis?
Versuche es auch mit anderen Ziffern.
Wie viele Aufgaben kannst du bilden?
Was fällt dir auf?



Worum geht es?
Aus jeder zweistelligen Zahl, die kein reiner Zehner ist, erhält man durch Vertauschen (Umkehren) der Ziffern wieder eine zweistellige Zahl. Für die Subtraktion von Umkehrzahlen gilt ganz allgemein: Bildet man von einer beliebigen Zahl die Umkehrzahl und subtrahiert die kleinere von der größeren Zahl, erhält man als Ergebnis stets ein Vielfaches von 9.

Beweis:
Sei a die Zehnerstelle und b die Einerstelle einer zweistelligen Zahl $a > b$.
Dann gilt für die Differenz Zahl – Umkehrzahl: $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. Wegen des ausgeklammerten Faktors 9 ist die Differenz unabhängig von den gewählten Ziffern immer durch 9 teilbar.
Die Differenz der beiden Ziffern bestimmt, wie oft die Neun im Ergebnis „steckt".

Die Zifferndifferenzen ergeben entsprechende Ergebnisse der 9er-Reihe:

Zifferndifferenz	Beispiel	Ergebnis
1	98 – 89	9
2	75 – 57	18
3	74 – 47	27
4	62 – 26	36
5	83 – 38	45
6	93 – 39	54
7	92 – 29	63
8	91 – 19	72

In dieser Aufgabe wird das Tastenfeld eines Taschenrechners zugrunde gelegt. So lernen die Schüler/innen gleichzeitig den Taschenrechner kennen und üben den Umgang damit.
Auf dem Tastenfeld ist die Differenz übereinander stehender Ziffern aufgrund der Anordnung immer drei, so dass die Subtraktion der Umkehrzahlen analog zur obigen Tabelle immer 27 ergibt. Ausnahme ist die Null, denn sie steht, abweichend vom Muster, unter der eins. Die Differenz der beiden Ziffern ist nicht drei sondern eins und das Ergebnis somit neun. Würde die Null entsprechend dem Muster unter der drei stehen, würde sich wieder das Ergebnis 27 ergeben (30 – 03).

Das Entdecken von Zusammenhängen und Mustern sowie das Entwickeln von Vermutungen steht im Zentrum dieser Aufgabe, was gerade auch Schülern, die beim Rechnen weniger gewandt sind, durch den erlaubten Einsatz des Taschenrechners erleichtert wird.

Wie kann man vorgehen?
Zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt jedes Kind einen Taschenrechner. Natürlich macht es nicht nur den leistungsschwächeren Schülern Spaß, die Subtraktionsaufgaben damit auszurechnen bzw. die Ergebnisse zu kontrollieren.
Alle Kinder sollten sich eine gute Zeit lang alleine mit der Aufgabe beschäftigen und ihre Ergebnisse schriftlich festhalten. Schnelle und leistungsstarke bzw. interessierte Schüler kann man herausfordern, indem man sie untersuchen lässt, wie sich die Zahlen auf dem Hunderterfeld und ihre Umkehrzahlen bei entsprechender Subtraktion verändern.
Es ist sehr anregend, wenn sich alle Schüler zu einem späteren Zeitpunkt ihre Ergebnisse untereinander vorstellen und darüber diskutieren, wie sie zu den einzelnen Annahmen gekommen sind. Kinder, die vielleicht nicht über das Auffinden der sieben Ziffernpaare an der Tastatur hinausgekommen sind, erhalten von den anderen Schülern wertvolle Informationen, die sie möglicherweise bei der nächsten Forscheraufgabe berücksichtigen können.

15 Schriftliche Addition

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Schriftliche Verfahren der Addition ausführen und beschreiben

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Klassenstufe
3 bis 4

Material
– Ziffernkarten von 0 bis 9

➔ Kopiervorlage im Anhang

Lege aus den Ziffernkarten 0 bis 9 Aufgaben zur schriftlichen Addition von zwei dreistelligen Zahlen. Du darfst jede Ziffer nur einmal verwenden.

Wie viele verschiedene Aufgaben kannst du finden?

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 623 \\ +\ 475 \\ \hline 1098 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 386 \\ +\ 541 \\ \hline 927 \end{array}$$

Worum geht es?
Es sollen Additionsaufgaben nach dem Schema „dreistellig plus dreistellig gleich vierstellig" oder „dreistellig plus dreistellig gleich dreistellig" gefunden werden. Besondere Beachtung erfordern hierbei der Zehnerübertrag sowie das Operieren mit der Null. Bei vierstelligen Ergebnissen tritt der Zehnerübertrag immer in der Hunderterstelle mit der Ziffer 0 auf, im Tausender steht dann die 1.
Die Anzahl möglicher Additionsaufgaben ist durch die Option, dass keine Ziffer doppelt vorkommen darf, begrenzt. Lösungen lassen sich zunächst nur durch Probieren finden. Durch systematisches Verschieben der Ziffernkärtchen findet man jedoch weitere Lösungen. Nach jedem Verschieben der Ziffernkärtchen müssen die Kinder ihre Lösungen überprüfen, wobei die Addition intensiv geübt und Verständnis für Zusammenhänge zwischen den Ziffern geweckt wird.
Mit der Zeit werden die Kinder zunehmend systematisch vorgehen und bereits gefundene Aufgaben verändern (aus dem obigen Beispiel 623 + 475 = 1098 kann durch Vertauschen der Zehner- und Einerziffern z. B. 675 + 423 = 1098, 432 + 657 = 1089 oder 632 + 457 = 1089 gefunden werden).

Wie kann man vorgehen?
Diese anspruchsvolle Forscheraufgabe eignet sich zum Beispiel als Abschluss des Themas „Schriftliche Addition". Mit magnetischen Ziffernkärtchen werden zunächst an der Tafel einige Aufgaben gelegt und vorgerechnet, deren Ergebnis drei- bzw. vierstellig wird. Es müssen dabei auf jeden Fall auch Aufgaben mit Übertrag vorkommen.
Schließlich werden die Kinder aufgefordert, selbstständig weitere Aufgaben zu finden und in ihr Heft zu schreiben. Dazu benötigen die Kinder einen Satz Ziffernkarten von 0 bis 9 zum Ausprobieren sowie Schmierpapier zum Ausführen der schriftlichen Addition. Schwächere Kinder fühlen sich vielleicht sicherer, wenn sie mit einem Partner oder in der Gruppe arbeiten dürfen. Am Ende der Arbeitsphase stellen die Schüler ihre gefundenen Lösungen im gemeinsamen Unterrichtsgespräch vor der Tafel oder im Stuhlkreis vor. Neben dem Vergleichen der Ergebnisse kommt es hierbei aber vor allem auf die gefundenen Lösungswege und das Vorstellen systematischer Vorgehensweisen an.

16 Schöne Päckchen

Rechne aus und setze fort:

57 + 48 =	57 – 36 =	12 · 7 =	72 : 9 =
57 + 43 =	58 – 37 =	13 · 6 =	64 : 8 =
57 + 38 =	59 – 38 =	14 · 5 =	56 : 7 =
+ =			
+ =			

Beschreibe deine Beobachtungen. Verwende dabei möglichst Fachbegriffe.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden

Klassenstufe
3 bis 4

→ Kopiervorlage im Anhang

Worum geht es?
Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt auf dem Erkennen der den Aufgabenpäckchen zugrunde liegenden Muster. Unter Verwendung der vorher erarbeiteten Fachbegriffe werden die beobachteten Zusammenhänge beschrieben.

Addition	Summand plus Summand gleich Summe
Subtraktion	Minuend minus Subtrahend gleich Differenz
Multiplikation	Faktor mal Faktor gleich Produkt
Division	Dividend geteilt durch Divisor gleich Quotient.

Mögliche Beobachtungen:
- Additionspäckchen: Der erste Summand bleibt immer gleich, der zweite Summand wird immer um fünf kleiner, somit wird auch die Summe immer um fünf kleiner (105, 100, 95, 90 und 85). Weitere Aufgaben: 57 + 33, 57 + 28.
- Subtraktionspäckchen: Der Minuend wird immer um eins größer, der Subtrahend wird ebenfalls immer um eins größer, so dass die Differenz immer gleich ist (21). Weitere Aufgaben: 60 – 39, 61 – 40.
- Multiplikationspäckchen: Der erste Faktor wird um eins größer, der zweite Faktor wird um eins kleiner. Dadurch wächst die Differenz zwischen den Produkten von Aufgabe zu Aufgabe jeweils um zwei. Weitere Aufgaben: 15 · 4, 16 · 3.
- Divisionspäckchen: Der Dividend wird immer um den Quotienten (acht) kleiner, der Divisor wird immer um eins kleiner. Dadurch bleibt der Quotient immer gleich (acht). Weitere Aufgaben: 48 : 6, 40 : 5.

Wie kann man vorgehen?
Die Aufgabe wird zunächst der gesamten Klasse vorgestellt, um sicherzustellen, dass alle Schüler sie verstanden haben. Der Lehrer wiederholt mit den Schülern eventuell die vorher erarbeiteten Fachbegriffe. Eine Wortsammlung an der Tafel könnte eine hilfreiche Gedächtnisstütze sein.
Dann bearbeitet jeder Schüler das Aufgabenblatt allein. Schnelle oder leistungsstärkere Schüler könnten im Anschluss eigene strukturierte Päckchen erfinden und sie von einem Partner lösen lassen. Denkbar wäre auch, nur die allgemeine Beschreibung der Veränderung notieren zu lassen, zu der ein Partner schließlich passende Aufgaben finden soll.
Im Anschluss an die Einzelarbeit kommt dem auswertenden Unterrichtsgespräch besondere Bedeutung zu. Die Schüler formulieren ihre Beobachtungen noch einmal mündlich, festigen den Gebrauch der Fachtermini und formulieren weitergehende Fragestellungen.

17 Zahlenmauerbau

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

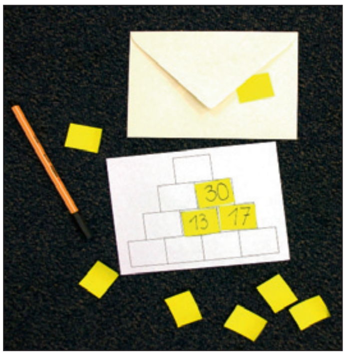
Anforderung
Im Zahlenraum bis 100 sicher addieren und subtrahieren

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

Klassenstufe
2 bis 6

Material
- farbige Zettel
- Briefumschläge

➔ Kopiervorlage im Anhang



Erfindet eine Zahlenmauer.

Schreibt dann die Zahlen auf die kleinen farbigen Zettel aus dem Umschlag.

Wenn ihr sicher seid, dass eure Zahlen zueinander passen, legt ihr alles in den Umschlag zurück.

Schreibt eure Namen darauf und heftet ihn mit einem Magneten an die Tafel.

Nun nehmt ihr eine Zahlenmauer einer anderen Gruppe und legt sie nach.

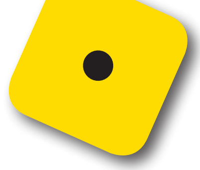
Worum geht es?

In einer Zahlenmauer beinhaltet jeder Stein die Summe der beiden unter ihm liegenden Steine. Wenn wie in dieser Aufgabe nur das Format der Zahlenmauer vorgegeben wird, ergeben sich große inhaltliche Spielräume. Je nachdem wo man mit der Arbeit beginnt, muss addiert oder subtrahiert werden. Der Zahlenraum wird nicht eingeschränkt, dadurch können sich die Schüler im für sie passenden Zahlenraum bewegen. Werden die Startzahlen der untersten Reihe möglichst klein gewählt, wird der Zahlraum bis 20 nicht überschritten.
Grundlage der Aufgabe ist das Wissen über die Bildungsregeln von Zahlenmauern. Das Entwerfen eigener Zahlenmauern beinhaltet eine natürliche Differenzierung. Bei der Auswahl der Zahlen besteht die Möglichkeit, vielfältige Entdeckungen zu machen und entsprechend dem jeweiligen Leistungsniveau zu arbeiten. Da die Zahlenmauern zur Weiterarbeit für die Mitschüler gedacht sind, ergeben sich zusätzliche Anregungen: Wie muss die Zahlenmauer gestaltet sein, damit die Lösung möglichst leicht/schwierig ist?
Während des Nachlegens der Zahlenmauern im nächsten Schritt werden Lösungsstrategien entwickelt, sowohl Additions- als auch Subtraktionsaufgaben geübt und die Einsicht in operative Zusammenhänge vertieft. Dabei gibt es jeweils mindestens zwei unterschiedliche Lösungen. Bei der Beschreibung der Lösungsstrategien im Plenum werden Argumente ausgetauscht, Lösungswege nachvollzogen und Anregungen aufgenommen.

Wie kann man vorgehen?

Vor dem Einsatz der Aufgabe wird sichergestellt, dass die Schüler mit dem Aufgabenformat Zahlenmauer vertraut sind. Die Schüler arbeiten am besten in Partnerarbeit. Jede Gruppe erhält einen Briefumschlag, ein leeres Zahlenmauerfeld und kleine farbige Zettel als Mauersteine und erfindet eine Zahlenmauer.
Nachdem die Schüler ihren Umschlag mit der fertigen Zahlenmauer an die Tafel geheftet haben, legen sie die Zahlenmauern von anderen Gruppen nach. Bei auftretenden Problemen können die Erfinder der jeweiligen Zahlenmauer zur Klärung herangezogen werden.
Das auswertende Gespräch am Ende ist von zentraler Bedeutung: Was ist dir aufgefallen? Wie seid ihr vorgegangen beim Aufbau der Zahlenmauern? Wie habt ihr herausgefunden, wie die Zahlenmauern der anderen Gruppen zusammengelegt werden müssen? Gab es nur eine Lösungsmöglichkeit?

Tipp: Unterschiedliche Farben für Gruppen verwenden, das hilft Ordnung zu halten. Aus einem Notizblock lassen sich die Zettel schnell und einfach falten und reißen.



18 Zahlen jagen

Dieses Spiel wird in zwei Gruppen mit je zwei Kindern gespielt.
Benötigt werden: ein Spielplan (Hunderterfeld), drei Würfel,
10 rote und 10 blaue Plättchen

Markiert zunächst die Zahl 24 auf dem Spielplan. Die Gruppen würfeln abwechselnd mit den drei Würfeln.

Nun müssen die gewürfelten Augen addiert, subtrahiert oder multipliziert werden. Ziel ist es, durch die Rechnung möglichst viele Zahlen zu erreichen, die auf dem Hunderterfeld an die 24 grenzen. Es müssen alle Würfel benutzt werden. Ihr sprecht dabei laut miteinander über euren Rechenweg. Die andere Gruppe hört zu und überprüft. Wenn ihr eine passende Rechnung gefunden habt, belegt ihr das Ergebnis mit einem Plättchen eurer Farbe. Auch an dieses Feld darf nun angelegt werden. Wenn ihr keine Zahl mehr treffen könnt, ist die andere Gruppe an der Reihe. Wenn eine Gruppe alle Plättchen angelegt hat, ist das Spiel zu Ende.

Worum geht es?
Bei dieser Aufgabe steht das geschickte und sichere Verbinden der Grundrechenarten im Mittelpunkt. Welche Würfelzahlen stehen zur Verfügung, um mit Hilfe von Multiplikation, Addition oder Subtraktion eine der Randzahlen genau zu treffen? Da nicht jede Operation bei der Rechnung vorkommen muss und die Reihenfolge der Operationen frei wählbar ist, eröffnet sich eine Vielzahl von Möglichkeiten, das gesuchte Ergebnis zu finden.
Im obigen Beispiel mit den Zahlen 3, 5, und 6 gibt es die Möglichkeiten: 6 + 3 + 5 = 14 oder 6 mal 3 + 5 = 23 oder 6 mal 5 + 3 = 33 oder 6 mal 3 – 5 zu rechnen. Wenn den Schülern das Rechnen mit Klammern vertraut ist, sind auch noch (6 + 5) mal 3 und (6 – 3) mal 5 gültige Lösungen.
Das gemeinsame Reflektieren, Vorrechnen und Begründen der gefundenen Lösungswege ist Kern der Aufgabe. Es fördert die Flexibilität im Umgang mit Rechenoperationen und die Automatisierung der Grundaufgaben.

Wie kann man vorgehen?
Zur Einführung sollte das Spiel zum sicheren Verständnis mit allen Schülern gemeinsam erarbeitet werden Dazu könnte das Spiel an der Magnettafel auf einem Hunderterfeld aus Papier demonstriert werden. Rote und blaue Magnete ersetzen die Plättchen, große Schaumstoffwürfel erleichtern die Übersicht für alle Schüler. Die Klasse wird in zwei Gruppen aufgeteilt. Entscheidend ist, dass die rechnenden Schüler ihre Gedanken laut äußern. Die andere Gruppe überprüft die Richtigkeit der Rechnungen.
Wenn sich die Schüler im weiteren Spielverlauf zu Vierer-Gruppen zusammengefunden haben ist es auch möglich, dass sie eine andere Startzahl als die 24 wählen. Dies bietet die Möglichkeit einer natürlichen Differenzierung durch Begrenzung oder Erweiterung des Zahlenraumes. Eine andere Möglichkeit der Differenzierung des Schwierigkeitsgrades liegt auch in der Verwendung von Spielwürfeln mit mehr als 6 Flächen oder der Hinzunahme der Division. Hier könnten auch größere Zahlen zu Zielzahlen werden. Eine weitere Variante ergibt sich durch die Begrenzung der Spielzeit pro Gruppen mit Hilfe eines Zeitnehmers oder einer Eieruhr.
Eine interessante Weiterführung der Aufgabe als Übungsformat für den Unterricht ist es, zu einer gegebenen Zielzahl mögliche Würfelbilder zu finden: Ist also z. B. die 42 gegeben, so muss das Kind passende Würfelbilder suchen und die Rechnungen dazu aufschreiben.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

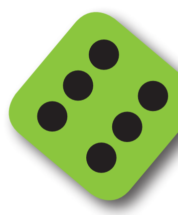
Anforderung
Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

Klassenstufe
2 bis 6

Material
- pro Gruppe ein Spielplan (Hunderterfeld)
- drei Würfel
- 10 rote und 10 blaue Plättchen

➔ Kopiervorlage im Anhang



19 Rechenzüge

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Schriftliche Rechenverfahren im Bereich der natürlichen Zahlen anwenden

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
4 bis 6

Literatur
Müller, Gerhard N./
Wittman, Erich Ch. (Hrsg.):
Mit KIndern rechnen;
Grundschulverband 1995

Material
– weißes Papier DIN A5

So entsteht der Rechenzug:

1 Lokomotive: Wähle drei unterschiedliche Ziffern von 1 bis 9.
2 Erster Waggon: Bilde daraus die kleinste und die größte Zahl. Subtrahiere schriftlich die kleinere von der größeren Zahl.
3 Weitere Waggons: Aus den Ziffern des Ergebnisses bildest du wiederum die kleinste und die größte Zahl und subtrahierst wieder.
4 Wiederhole dies, solange es geht.
5 Was fällt dir auf?
6 Hefte deinen Rechenzug an die Tafel. Vergleiche mit den anderen.
7 Notiere die Aufgabe und mindestens eine Beobachtung in deinem Rechenheft.

Worum geht es?

Die Aufgabe hat einen hohen Aufforderungscharakter und macht vor allem wegen der überraschenden Entdeckungen aus einer simplen schriftlichen Subtraktion eine Attraktion. Das Finden von unterschiedlich oder gleich langen Zugvariationen motiviert dazu, schon während der Arbeitsphase miteinander ins Gespräch zu kommen: Kommt am Ende immer 495 raus? Wie viele mögliche Züge gibt es überhaupt? Besteht ein Zusammenhang zwischen den gewählten Ziffern und der Länge des Zuges?
Beim Berechnen der Rechenzüge geht es um die schriftliche Subtraktion von Umkehrzahlen. Aus drei Ziffern werden jeweils die kleinste und die größte mögliche Zahl gebildet und daraus die Differenz ermittelt. Dabei sind die Zehnerziffern von Minuend und Subtrahend immer gleich, da die zweitgrößte Ziffer bei beiden Zahlen in der Mitte steht. Daraus folgt, dass die Zehnerziffer der Differenzen immer 9 sein muss, denn die Subtraktion der Einer hat immer einen Übertrag. Einer- und Hunderterstelle ergänzen sich jeweils zu neun. Folgende acht Zahlen sind also als Ergebnis möglich: 198, 297, 396, 891, 792, 693, 594, 495. Ab dieser Zahl wiederholen sich die Rechnungen, denn es ist stets 954–459 zu rechnen. Alle Rechenzüge enden nach maximal fünf Rechnungen bei der Zahl 495. Die Einer in der Differenz nehmen ab Schritt zwei jeweils um eins zu, bis sie fünf erreicht haben.

Wie kann man vorgehen?

Die Aufgabenstellung wird an der Tafel vorbereitet und kurz erläutert. Die Schüler entscheiden selbst, ob sie in Einzel- oder Partnerarbeit vorgehen. Sie benötigen mehrere weiße Papiere in DIN A5-Format, Farbstifte und Tesafilm.
Zunächst zeichnen sie auf das erste Papier eine Lokomotive in Seitenansicht mit drei Fenstern. Die drei selbstgewählten Ziffern werden in die Fenster der Lokomotive eingetragen. Mit diesen Ziffern startet der Rechenzug. Auf dem nächsten Papier wird die erste schriftliche Subtraktion so groß notiert, dass sie das gesamte Papier gut ausfüllt und später beim Anbringen an der Tafel deutlich zu lesen ist.
Diese und jede weitere Subtraktion stellen immer einen weiteren Waggon des Rechenzugs dar. Es geht so lange weiter, bis keine neue Aufgabe mehr möglich ist. Dass das immer bei dem Ergebnis 495 der Fall ist, wird selbstverständlich nicht vorher verraten. Im Rechenheft werden Auftrag und Beobachtungen notiert. Die Rechnungen der Waggons werden noch einmal von den Schülern geprüft und schließlich zu einem fortlaufenden Rechenzug zusammengeklebt an die Tafel geheftet.
Mit der gesamten Gruppe folgt ein Austausch im Kinositz vor der Tafel, bei dem die gesammelten Beobachtungen und die Begründungen im Vordergrund stehen. Gezielte Fragen (Warum steht in der Mitte immer eine Neun? Warum nimmt die Einerziffer in den Ergebnissen immer um Eins zu?) helfen dabei, über Begründungen nachzudenken.
In Klasse 5 und 6 kann man auf das Bild des Rechenzuges verzichten und die Aufgabe ohne Kontext anbieten. Der Ablauf der Arbeitsschritte bleibt gleich.

20 Stauaufgabe

An einer Ampel hat sich ein 100 Meter langer Stau gebildet.
Wie viele Fahrzeuge und wie viele Personen befinden sich in dem Stau?
Stelle deine Lösung mit Hilfe von Maßband und Papierstreifen übersichtlich dar.

Worum geht es?
Aufgaben dieser Art gehen auf den italienischen Kernphysiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901–1954) zurück. Fermi-Aufgaben sind komplexe Probleme, die keine oder für eine eindeutige rechnerische Lösung nur unzureichende Informationen enthalten. Die Schüler können die benötigten Daten nur annähernd recherchieren, erfragen oder schätzen. Ziel ist es, über vernünftige, begründbare Annahmen ein ungefähres mögliches Ergebnis zu erhalten. In diesem Beispiel müssen sich die Schüler Gedanken darüber machen, wie viele Autos in dem Stau stehen und wie viele Personen darin sitzen. Wie lang ist ein Auto? Stehen auch LKW an der Ampel? Stehen die Autos Stoßstange an Stoßstange oder ist ein Abstand dazwischen? Wie viele Menschen sitzen in einem Auto? Ist das immer gleich?
Für eine anschauliche Lösung der Aufgabe kann der 100 Meter lange Stau durch ein Maßband oder einen entsprechenden Papierstreifen dargestellt werden, die Autos durch maßstabsgetreue Streifen aus Kästchenpapier. Der Maßstab ist bei dieser Vorgehensweise eine entscheidende Lösungshilfe und muss gegebenenfalls thematisiert werden.

Wie kann man vorgehen?
Im Unterrichtsgespräch werden die grundlegenden Informationen gemeinsam besprochen, z. B. die ungefähre Länge eines Autos. Möglicherweise stellen die Schüler bereits zu diesem Zeitpunkt fest, dass verschiedene Autos unterschiedlich lang sind oder dass auch ein Bus oder LKW im Stau stehen könnte. Vor der tatsächlichen Bearbeitung der Aufgabe mit den vorgegebenen anschaulichen Hilfen können die Schüler zur Motivation Schätzungen bezüglich der Anzahl der Autos und der Personen abgeben. Im auswertenden Unterrichtsgespräch am Ende der Arbeitsphase können die Schätzungen wieder aufgegriffen werden und mit den vorliegenden Lösungen verglichen.
Einzeln oder in Kleingruppen wird die Aufgabe ganz praktisch bearbeitet. Aus Papierstreifen werden maßstabsgetreue Autos und LKW hergestellt und auf die vorbereitete Strecke geklebt. Zu jedem Fahrzeug wird die Anzahl der möglichen Insassen ergänzt. Die Anzahl der möglichen Autos und Personen im Stau lassen sich so leicht abzählen und notieren.
Eine gemeinsame Auswertung der unterschiedlichen Arbeitsergebnisse schließt sich an die Gruppenarbeit an. Dazu werden die Arbeitsergebnisse z. B. an die Tafel geheftet und die unterschiedlichen Ergebnisse in einer Tabelle zusammengetragen. Die Schüler erläutern ihre Lösungen und vergleichen diese mit anderen. Es kann nach Ursachen für die unterschiedlichen Ergebnisse gesucht werden: Wurde der Abstand zwischen den Autos berücksichtigt? Ist der Abstand realistisch eingeschätzt worden? Gibt es Unterschiede zwischen Lösungen, bei denen nur ein Standardauto verwendet wurde und Lösungen, bei denen verschiedene Autotypen angenommen wurden? Wie wurden die Personen pro Auto errechnet: Ist in jedem Auto dieselbe Anzahl oder variiert die Anzahl von Fahrzeug zu Fahrzeug? Könnten an der Ampel auch mehrere Fahrspuren sein?
Durch den Austausch über die verschiedenen Arbeitsergebnisse wird die Vielfalt der möglichen Lösungen dieser Aufgabe deutlich. Die Schüler werden angehalten, ihre Vorgehensweise zu reflektieren und zu verbalisieren.

Rahmenlehrplanbezug

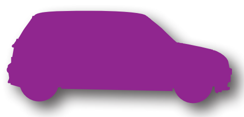
Themenfeld
Zahlen und Operationen

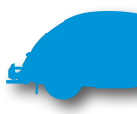
Anforderung
Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen

Allgemeine mathematische Kompetenz
MODELLIEREN: Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Klassenstufe
3 bis 5

Material
- Streifen aus Kästchenpapier,
- Kleber
- Schere
- Maßband





21 Kreuz-Zahlen auf der Hundertertafel

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

Klassenstufe
3 bis 4

Material
– Hunderterfeld auf Folie
– farbiges Folienkreuz

→ Kopiervorlage im Anhang

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1 Auf dem Hunderterfeld siehst du ein Zahlenkreuz mit der Summe 75. Verschiebe es zuerst um ein Feld nach rechts. Rechne die Summe der Zahlen aus. Schiebe dann das Kreuz um ein Feld nach unten und rechne die Summe aus. Was stellst du fest?
2 Finde weitere Kreuzzahlen.
3 Kannst du erklären, wie sich die Kreuzzahlen durch das Verschieben verändern? Schreibe auf, was du feststellst.

Worum geht es?
In einem Hunderterfeld werden fünf Felder so gefärbt, dass sie ein Kreuz ergeben. Die Zahl in der Mitte ist die Mittelzahl. Die 5 Zahlen im Kreuz werden addiert, die Summe wird Kreuzzahl genannt.
Die Addition der beiden Zahlen über/unter bzw. links/rechts der Mittelzahl ergibt immer das Doppelte der Mittelzahl. Alle möglichen Kreuzzahlen ergeben das Fünffache der Mittelzahl und sind somit auch durch fünf teilbar. Das liegt daran, dass die Abstände von der Mittelzahl nach links (–1) und rechts (+1) sowie nach oben (–10) und unten (+10) gleich sind und sich somit die Zahlen links und rechts bzw. oben und unten zur Mittelzahl gegenseitig aufheben und den gleichen Wert ergeben (Mittelzahl selbst plus viermal die Mittelzahl, also fünf mal die Mittelzahl).

1	2	3	4	5
11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35

3 + 12 + 13 + 14 + 23 = 65 (Kreuzzahl)
3 + 23 = 26 (2 mal die Mittelzahl 13)
12 + 14 = 26 (2 mal die Mittelzahl 13)
13 (Mittelzahl) mal 5 = 65

Beim Verschieben des Kreuzes nach rechts (links) erhöht (verringert) sich die Kreuzzahl um fünf, da für jede der fünf Zahlen eine Verschiebung nach rechts + 1 (nach links gleich – 1) bedeutet.
Beim Verschieben nach oben (unten) verringert (erhöht) sich die Kreuzzahl um 50, da für jede der fünf Zahlen eine Verschiebung nach oben – 10 (nach unten + 10) bedeutet. Die kleinste Kreuzzahl, die sich im Hunderterfeld legen lässt, ist 60 (Mittelzahl 12). Das Berechnen der Kreuzzahlen ist ein sehr interessantes Aufgabenformat zum Üben von Addition, Subtraktion und Multiplikation. Gleichzeitig fördert die Aufgabe Einsichten in Aufbau und Struktur des Hunderterfeldes, z. B. bei der Untersuchung, wie sich die Kreuzzahlen durch Verschiebung verändern.
Das gemeinsame Besprechen der Entdeckungen fördert die Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit der Schüler. Auch das Verstehen geschickter Rechenwege kann zum Thema werden.

Wie kann man vorgehen?
Mit Hilfe von Overhead-Folie und Projektor wird den Schülern das Hunderterfeld in Erinnerung gerufen und einige der wesentlichen Merkmale besprochen. Entsprechend der Aufgabenstellung wird das Kreuz mit der Summe 75 markiert (mit einer zugeschnittenen farbigen Folie geht das besonders gut) und die anzustellenden Rechnungen gemeinsam nachvollzogen. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis der Kreuzzahlen.
Alle Schüler benötigen ein Hunderterfeld, die Aufgabenstellung kann an der Tafel formuliert werden. In Einzel- oder Partnerarbeit werden die Aufgaben bearbeitet. Der Einsatz eines farbigen Folienkreuzes kann sehr hilfreich sein, um weitere Kreuzzahlen zu finden. Es wird über den jeweiligen Zahlenausschnitt gelegt, wodurch die fünf Zahlen farbig hervortreten, und kann leicht verschoben werden.
Ein gemeinsames Gespräch mit allen Schülern über gefundene Zusammenhänge und Vermutungen darüber ist unerlässlich. Das Äußern und Diskutieren der Beobachtungen und Vermutungen vertieft die Einsicht und führt zu einem tieferen Verständnis von Strukturen.

22 Die tolle 15

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen

Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen

Klassenstufe
3 bis 4

Material
– 21 Würfel

Spielbeschreibung:

Jeweils vier Schüler spielen mit drei Würfeln.

Ein Schüler würfelt und alle Spieler müssen versuchen, aus den drei gewürfelten Augenzahlen unter Verwendung der vier Grundrechenarten eine Aufgabe zu bilden, deren Ergebnis 15 ist. An jede Augenzahl darf eine Null angehängt werden.

Hat ein Schüler eine Lösung gefunden, bekommt er – natürlich erst nach entsprechender Überprüfung – einen Punkt. Es wird erneut gewürfelt.

Worum geht es?
Es gibt 56 verschiedene Zahlenkombinationen, wenn mit drei Würfeln gewürfelt wird. Die Reihenfolge der Zahlen spielt dabei keine Rolle und alle Zahlen können mehrfach vorkommen. Die drei gewürfelten Zahlen können beliebig mit unterschiedlichen Rechenoperationen verbunden werden, um das Ergebnis 15 zu erhalten. Da jede Ziffer nur einmal benutzt werden darf, ist es gar nicht so leicht, eine passende Lösung zu finden.
Die Zusatzregel „An jede Augenzahl darf eine Null angehängt werden“ erweitert nicht nur die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten beträchtlich, sondern eröffnet einen Zahlenraum, der auch für Dritt- und Viertklässler herausfordernd ist. Ob die Null an eine, zwei oder alle drei Augenzahlen angehängt werden darf, führt zu unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden und kann je nach Leistungsvermögen der Kinder variiert werden.
Die Option, die Null mehrfach einzusetzen, ermöglicht es, zu fast allen Augenkombinationen eine Aufgabe mit dem Ergebnis 15 zu finden. Mögliche Lösungen:

Würfelaugen	Kombination mit dem Ergebnis 15	Würfelaugen	Kombination mit dem Ergebnis 15
1; 1; 1		1; 3; 6	60 : (3 + 1)
1; 1; 2	(10 : 2) + 10	1; 4; 4	4 · 4 – 1
1; 1; 3	30 : (1 + 1)	1; 4; 5	(4 – 1) · 5
1; 1; 4	10 + 1 + 4	1; 4; 6	60 : (4 · 1)
1; 1; 5	1 · 10 + 5	1; 5; 5	5 · 5 – 10
1; 1; 6	10 + (6 – 1)	1; 5; 6	60 : (5 – 1)
1; 2; 2	(20 + 10) : 2	1; 6; 6	
1; 2; 3	10 + 2 + 3	2; 2; 2	
1; 2; 4	20 – (4 + 1)	2; 2; 3	20 – (2 + 3)
1; 2; 5	(1 + 2) · 5	2; 2; 4	20 – (20 : 4)
1; 2; 6	20 – (6 – 1)	2; 2; 5	20 : 2 + 5
1; 3; 3	30 : (3-1)	2; 2; 6	60 : (2 + 2)
1; 3; 4	(1 + 4) · 3	2; 3; 3	(2 + 3) · 3
1; 3; 5	5 · 3 · 1	2; 3; 4	30 : (4 – 2)

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Grundschule / Mathematik ist mehr als Rechnen – 30 Aufgaben, die zum Sprechen über mathematische Zusammenhänge anregen

Würfelaugen	Kombination mit dem Ergebnis 15	Würfelaugen	Kombination mit dem Ergebnis 15
2; 3; 5	30 – 20 + 5	3; 4; 6	30 : (6 – 4)
2; 3; 6	2 · 6 + 3	3; 5; 5	50 – 30 – 5
2; 4; 4	(40 + 20) : 4	3; 5; 6	(60 : 3) – 5
2; 4; 5	40 – 20 – 5	3; 6; 6	3 + 6 + 6
2; 4; 6		4; 4; 4	
2; 5; 5	2 · 5 + 5	4; 4; 5	40 : 4 + 5
2; 5; 6	5 · 6 : 2	4; 4; 6	
2; 6; 6	60 : (6 – 2)	4; 5; 5	4 · 5 – 5
3; 3; 3		4; 5; 6	4 + 5 + 6
3; 3; 4	4 · 3 + 3	4; 6; 6	
3; 3; 5	30 : (5 – 3)	5; 5; 5	5 + 5 + 5
3; 3; 6	3 · 3 + 6	5; 5; 6	60 – 50 + 5
3; 4; 4		5; 6; 6	60 : 6 + 5
3; 4; 5	40 – 30 + 5	6; 6; 6	

Grundvoraussetzung für das schnelle Finden geeigneter Lösungen ist das sichere Beherrschen der vier Grundrechenarten und deren flexibles Verknüpfen. Um zu einer richtigen Aufgabenkombination zu gelangen, müssen die Schüler konzentriert mehrere Operationen im Kopf durchführen, überprüfen, verändern, wieder überprüfen usw. Da die Aufgaben von den Schülern mündlich genannt werden, können die Klammergesetze außer Acht gelassen werden. Bei einer eventuellen schriftlichen Notation an der Tafel könnte die Rechnung unter Verwendung von Operationspfeilen dargestellt werden.
Die Darstellung der Lösungsmöglichkeiten oben ist nur für die Hand des Lehrers gedacht, für die Schüler geht es nur um das schnelle Finden von Lösungen und nicht um eine systematische Übersicht.

Wie kann man vorgehen?
Das Spiel wird zur Einführung mit der gesamten Klasse gespielt, damit die Spielregeln und das Spielprinzip von allen verstanden werden. Dabei werden mehrere Kombinationsmöglichkeiten durchgespielt, um vor allem das Benutzen der Null verständlich zu machen.
Das flexible Variieren zwischen Einern und Zehnern ist recht anspruchsvoll und es wird zu Anfang nicht immer einfach sein, eine geeignete Lösung zu finden. Gegebenenfalls wird vorher das Zerlegen von Zahlen noch einmal gemeinsam geübt.

Weiterarbeit
Eine herausfordernde Variation des Spiels bietet die Regel, dass zwei Ziffern zu einer Zahl kombiniert werden dürfen: 1; 1; 4 → 1 + 14 = 15 oder 3; 4; 5 → 45 : 3 = 15). Auch diese Regel fordert zum Operieren mit größeren Zahlen heraus und bietet dadurch mehr Möglichkeiten für eine natürliche Differenzierung.
Eine andere Variante ist der Einsatz von vier Würfeln pro Gruppe. Diese Variante erhöht die Anforderungen deutlich.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen und in verschiedenen Situationen anwenden

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisches Probieren)

Klassenstufe
4 bis 6

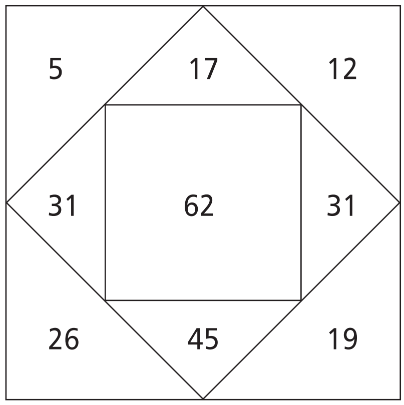
➔ Kopiervorlage im Anhang

23 Das geheimnisvolle Viereck

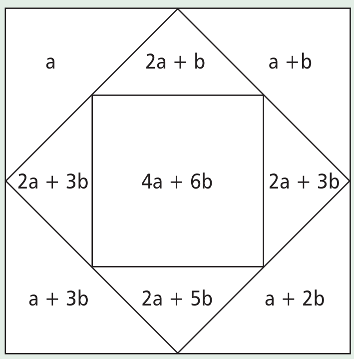
In ein Viereck sind zwei kleinere Vierecke eingezeichnet.
Gehe wie folgt vor:

a Trage oben links in die Ecke eine beliebige Zahl ein, die Startzahl (im Beispiel 5).
b Denke dir eine weitere beliebige Zahl aus, den Zuwachs (im Beispiel ist es die 7, sie hat kein eigenes Feld). Die drei anderen Eckfelder werden im Uhrzeigersinn immer um diesen Zuwachs größer (im Beispiel 12, 19 und 26).
c In die Dreiecke zwischen den Eckzahlen wird die Summe der beiden benachbarten Eckzahlen eingetragen (im Beispiel 17 = 5 + 12).
d In die Mitte kommt die Summe aller vier Eckzahlen (im Beispiel 62).

Zeichne solche Vierecke in dein Heft.
Probiere unterschiedliche Startzahlen und unterschiedlichen Zuwächse aus.
Welche Zusammenhänge fallen dir auf?
Kannst du sie erklären?



Worum geht es?
Die Aufgabe erinnert an magische Quadrate, in der die Summen in den Zeilen, Spalten und Diagonalen immer das gleiche Ergebnis haben. Bei der vorliegenden Aufgabe wächst die Startzahl a von Ecke zu Ecke um die gleiche Summe b. Das mittlere Quadrat ist die Summe der vier Eckfelder. Die Felder zwischen den äußeren Ecken bilden die Summe der angrenzenden Eckfelder. Mit Hilfe von Termen lässt sich das Quadrat allgemeingültig so ausfüllen:



Die Summe der Felder könnte also auch als Gleichung angegeben und die Lösung durch das Berechnen der Unbekannten gefunden werden. Diese Werkzeuge stehen den Grundschülern in der Regel aber noch nicht zur Verfügung.

Für Grundschüler kann der Reiz der Aufgabe gerade im Entdecken der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Feldern liegen. Mögliche Beobachtungen der Schüler könnten sein:

– Die Zahlen in den seitlichen Dreiecken sind gleich groß.
– Die Zahlen in den Dreiecken steigen um das Doppelte des Zuwachses (außer die letzte).
– Die Zahl in der Mitte ist jeweils die Summe der Zahlen aus dem darüber und darunter liegenden Dreieck und auch aus dem links und rechts daneben liegenden Dreieck.
– Die Differenz der letzten und ersten Eckzahl ist das Dreifache des Zuwachses.
– Die Differenz der diagonal gegenüberliegenden Eckzahlen ist das Doppelte des Zuwachses.

Wie kann man vorgehen?
Voraussetzung für die Bearbeitung dieser Aufgabe ist das gründliche Verstehen der Aufgabenstruktur. Da die Struktur sehr komplex ist, ist eine gemeinsame Erarbeitung mit allen Schülerinnen und Schülern notwendig. Das gemeinsame Ausprobieren an einigen Beispielen erleichtert das Verstehen.
Danach zeichnen und berechnen die Schüler/innen eigene Zahlenvierecke oder benutzen eine Kopiervorlage. Sie suchen an den eigenen Zahlenvierecken nach Beziehungen zwischen den einzelnen Feldern und halten diese möglichst genau schriftlich fest. Mithilfe ihrer Beobachtungen ergänzen die Schüler die fehlenden Felder der vorgegebenen Zahlenvierecke. Sie wenden die gefundenen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Feldern an und können so die noch leeren Felder berechnen. Je nach Leistungsvermögen nutzen die Schüler die bestehenden Beziehungen, probieren systematisch aus oder berechnen die leeren Felder reihum.
Schüler/innen, die Schwierigkeiten haben, die verschiedenen Zusammenhänge zu entdecken, berechnen zunächst nur die leeren Felder nach der Vorschrift. Leistungsstärkere Schüler/innen könnten herausfinden, ob die frei einzutragenden Zahlen beliebig sind oder miteinander zusammenhängen. Gibt es manchmal mehrere Lösungsmöglichkeiten oder auch keine? Die unterschiedlichen Strategien werden in der Klasse präsentiert. Im gemeinsamen Gespräch wird dadurch das Vorgehen für alle Schüler/innen transparent gemacht und das Verständnis vertieft.
Zur vertiefenden Arbeit wenden die Schüler/innen die gefundenen Zusammenhänge beim Ergänzen von vorgefertigten Zahlenvierecken an, in denen leere Felder mit den richtigen Zahlen gefüllt werden sollen (siehe Kopiervorlage). Die Aufgaben sind vom Schwierigkeitsgrad sehr unterschiedlich je nachdem, wie viele und welche Felder bereits vorgegeben sind. Eine weitere Aufgabenstellung ist, dass sich die Schüler/innen eigene Zahlenvierecke mit fehlenden Feldern ausdenken und diese in Partnerarbeit lösen.

Weiterarbeit
Die gesamte Aufgabe und insbesondere die Frage, ob jede Zahl in der Mitte erscheinen könnte, kann auf das Thema Teilbarkeit oder zu den Primzahlen führen. Auch die Entwicklung des Begriffs Term ist als Anschluss an diese Aufgabe denkbar.

24 Herr Durchblick stand auf der Leiter

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Zahlen und Operationen

Anforderung
Aus Handlungen und Sachverhalten Operationen herauslösen und zu Gleichungen führen

Allgemeine mathematische Kompetenz
KOMMUNIZIEREN: Eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

Klassenstufe
4 bis 6

➔ Kopiervorlage im Anhang

Herr Durchblick stand auf der mittleren Sprosse einer Leiter.
Er putzte die Fenster eines Bürogebäudes. Um noch mehr Fenster putzen zu können, stieg er drei Sprossen weiter hoch.

Da sah er, dass er unten ein Fenster vergessen hatte und stieg wieder fünf Sprossen herunter. Als er mit diesem Fenster fertig war, stieg er sieben Sprossen höher und putzte die übrigen Fenster. Als er fertig war, stieg er die restlichen sechs Sprossen bis ans Ende der Leiter hoch, um vom Dach des Gebäudes die schöne Aussicht zu genießen.

Wie viele Sprossen hat seine Leiter? Wie hast du gerechnet?

Worum geht es?
Die Aufgabe gehört in den Bereich der Knobelaufgaben. Dabei handelt es sich um Aufgaben, für die es kein eindeutiges Lösungsverfahren gibt bzw. keines, das in der Grundschule zur Verfügung steht. Sinnvoll ist der Einsatz solcher Aufgaben in der Grundschule vor allem, um das Entwickeln von Lösungsstrategien zu üben und sich mit anderen über den gefundenen Lösungsweg auszutauschen.
Bei dieser Aufgabe wird die Summe der Leitersprossen gesucht. Diese kann beispielsweise aus der Summe der Sprossen, die nach der mittleren noch erklommen werden, ermittelt werden. Der zentrale Gedanke dabei ist, dass es sich um eine ungerade Anzahl von Sprossen handeln muss, denn sonst könnte Herr Saubermann nicht auf der Mittleren stehen. Durch schrittweises Addieren und Subtrahieren der Sprossen lässt sich herausfinden, dass Herr Durchblick auf der 23. Sprosse steht.

Algebraisch lässt sich die Aufgabe als Gleichung mit einer Unbekannten x (Anzahl der Leitersprossen) schreiben:

$x = \frac{x + 1}{2} + 3 - 5 + 7 + 6$ Löst man nach x auf, ergibt sich 23 als Lösung.

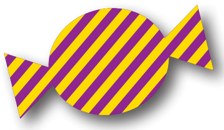
Dieses Lösungsverfahren ist selbstverständlich nicht das zentrale Thema der Grundschule. Dass interessierte Kinder eine Gleichung finden, ist aber durchaus vorstellbar. Vorrangig geht es um das Lösen von Problemen wie auch um die Kommunikation über verschiedene Lösungswege. Es bieten sich die Verwendung von Skizzen, von Modellen einer Leiter sowie das systematische Erproben von Lösungsmöglichkeiten an.

Wie kann man vorgehen?
Diese Knobelaufgabe eignet sich für den Einsatz im Wochenplan bzw. in der Werkstattarbeit. Die Aufgabe lässt sich in Einzel-, Partner oder Gruppenarbeit bewältigen. Besondere Bedeutung kommt dem gemeinsamen Besprechen der unterschiedlichen Lösungswege zu. Hierzu sollte genügend Zeit eingeplant werden.
Es bieten sich vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung an. Einfachere Aufgabenstellungen ergeben sich, wenn es nicht unter die mittlere Leitersprosse geht. Leistungsstarke Schüler sollten ermuntert werden, ihre Lösung so kurz und so systematisch wie möglich schriftlich darzustellen, so dass der Weg zu einer Gleichung nur noch sehr kurz ist oder vielleicht sogar beschritten werden kann.

Weiterarbeit
Als Weiterführung bietet sich an, die Schüler Leiteraufgaben mit anderen Stufenzahlen entwerfen zu lassen. Wie können Aufgaben für Leitern mit einer geraden Anzahl von Sprossen aussehen? Kann man bei einer Leiter mit einer geraden Anzahl von Sprossen auf der „mittleren“ Sprosse stehen?

25 Bunte Balken

Untersucht den Inhalt eurer Kaubonbontüte.



Wie viele Bonbons befinden sich in der Tüte?
Wie viele verschiedene Farben gibt es?
Wie viele Bonbons gibt es von jeder Farbe?

Stellt die Ergebnisse der Untersuchung übersichtlich in einem Schaubild dar.

Naschen ist erst nach der statistischen Erhebung erlaubt!!

Worum geht es?
Bei dieser Aufgabe geht es um Methoden zur Erfassung, Aufbereitung und Darstellung statistischer Daten (realistische Daten aus dem Alltag der Kinder). In Kaubonbontüten befinden sich häufig Kaubonbons, die sich in mindestens einem Merkmal unterscheiden: Farbe, Form oder Bonbonsorte. Sind die unterschiedlichen Farben, Formen oder Bonbonsorten gleichmäßig verteilt? Werden sie gleichmäßig in die Tüten verpackt oder ist die jeweilige Anzahl zufällig?
Eine erste Herausforderung der Aufgabe ist das Festlegen von Unterscheidungsmerkmalen der Kaubonbons. Dann muss gezählt werden und die Ergebnisse notiert. Eventuell muss nach anderen Kriterien neu geordnet und erneut gezählt werden.
Als nächstes soll dann eine übersichtliche Darstellung gefunden werden. Hierzu bieten sich neben freien Zeichnungen der Schüler vor allem Tabellen, Säulen- und Balkendiagramme an. Das Balkendiagramm hat für jüngere Kinder den Vorteil, dass beispielsweise stabförmige Kaubonbons in die Vorlage hineingelegt und abgezeichnet werden können. Bei diesem Vorgehen kommt der eindeutigen Beschriftung des Diagramms besondere Bedeutung zu. Es muss für alle ersichtlich sein, ob ein Kästchen in der Zeichnung einem Kaubonbon entspricht oder aber die Kästchen die Länge der Kaubonbons wiedergeben. Für ältere Schüler ist die Darstellung in einem Kreisdiagramm, dass vor allem die Anteile einer bestimmten Farbe oder Sorte hervorhebt, eine sinnvolle Variante.

Wie kann man vorgehen?
Den Kindern werden die Kaubonbontüten gezeigt. Sie sollen Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Tüteninhalt und Mathematikunterricht anstellen. Jeweils eine Gruppe von drei bis fünf Schülern erhält dann eine Kaubonbontüte und untersucht den Inhalt der Tüten nach vorgegebener Aufgabenstellung.
Nachdem sie diese konkret gezählt und nach Farben geordnet haben, diskutieren sie über geeignete Darstellungsformen, um ihre Ergebnisse mit den anderen Gruppen zu vergleichen.
Als Hilfe für jüngere Schüler oder Schüler mit wenig Erfahrung mit entsprechenden Diagrammen könnte ein vorbereitetes Säulendiagramm zum Darstellen der Ergebnisse nach Auszählung und Farbsortierung der Kaubonbons angeboten werden.
Wichtig ist, dass es eine gründliche Vorstellung und Auswertung der Ergebnisse in der Klasse gibt, bei der die Schüler ihre Entscheidungen begründen und reflektieren können.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Daten und Zufall

Anforderung
Daten erfassen, aufbereiten und darstellen

Allgemeine mathematische Kompetenz
DARSTELLEN: Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Klassenstufe
1 bis 4
JÜL-geeignet

Literatur
Nitsch, Barbara: „1, 2, 3 Wackelzähne“ in: Grundschule 05/2010; Westermann

Material
– pro Gruppe eine Tüte Kaubonbons

26 Lieblingstiere

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Daten und Zufall

Anforderung
Daten erfassen, aufbereiten und darstellen

Allgemeine mathematische Kompetenz
DARSTELLEN: Für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen

Klassenstufe
1 bis 2;
JÜL-geeignet

Literatur
Nührenbörger, Marcus/Pust, Sylke: Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierenden Anfangsunterricht; Kallmeyer 2006

Welche Lieblingstiere haben die Kinder in eurer Klasse?

Macht eine Umfrage, notiert die Ergebnisse und stellt sie übersichtlich dar.

Worum geht es?

Gerade jahrgangsgemischte Klassen sind am Anfang des Schuljahres von vielen Veränderungen betroffen. Auch im Mathematikunterricht bieten sich vielfältige Möglichkeiten, sich bei der gemeinsamen Arbeit gegenseitig besser kennenzulernen.
Ein wesentlicher Aspekt des Themenfeldes Daten und Zufall ist das Erheben, Auswerten und Darstellen von Daten. Unterschiedliche Aspekte aus dem Lebensumfeld der Schüler, die für alle anderen auch von Interesse sind, bieten dafür eine gute Grundlage. Von Tieren geht für Grundschüler ein hoher Anreiz aus, die Frage nach den Lieblingstieren ist dadurch ein guter Start in das Thema Daten erfassen.
Die gesammelten Daten der Mitschüler müssen übersichtlich sortiert und aufgeschrieben werden. Tabellen und Strichlisten bieten eine gute Übersicht über die einzelnen Häufigkeiten. Streifen-, Balken- oder Säulendiagramme sind auch für Schulanfänger leicht zu erfassen und geben einen schnellen Überblick über die Unterschiede zwischen den einzelnen Kategorien. Die Länge der Streifen und die Höhe der Säulen machen auch ohne Kenntnis der Zahlen deutlich, welches die Favoriten sind.

Wie kann man vorgehen?

Mit der gesamten Klasse wird die Aufgabe besprochen. In Partner- oder Gruppenarbeit sammeln die Kinder dann in einer Umfrage die benötigten Daten. Das übersichtliche Notieren der Ergebnisse ist ein wichtiger Lernprozess. Sind die Lieblingstiere in der Klasse ermittelt, müssen dann Möglichkeiten gefunden werden, die Antworten zu ordnen und übersichtlich darzustellen. Die strukturierte Darstellung der erfassten Daten gibt einen guten Überblick über die Anzahlen und eventuelle Häufungen. Man kann sie optisch gut wahrnehmen und vergleichen. Durch unterschiedliche Darstellungen werden Vor- und Nachteile der Darstellungsformen deutlich. Das setzt voraus, dass ausreichend Zeit für die Präsentation und das auswertende Unterrichtsgespräch eingeplant wird.

Weiterarbeit

Zur Weiterarbeit bietet sich das Erfassen zusätzlicher Daten an. Lieblingsessen, Geburtsmonate, Schuhgrößen, ausgefallene Zähne sind nur eine kleine Auswahl interessanter Informationen von anderen Kindern. Eine kleine Ausstellung, die im Laufe der Zeit durch weitere Daten ergänzt wird, bietet vielfältige Gesprächsanlässe. Auch das Ausweiten der Stichprobe auf Parallelklassen, Familienangehörige usw. vertieft das Verständnis für Diagramme.

27 Handypin

Herr Winterfeld hat die PIN seines nagelneuen Handys vergessen.
Zum Glück weiß er noch die einzelnen Ziffern,
aber leider nicht mehr die richtige Reihenfolge.

Die Ziffern lauten 1, 4, 5 und 7.

Wie viele PINs sind mit diesen vier Ziffern möglich?

Worum geht es?

Hierbei handelt es sich um eine kombinatorische Fragestellung, die Verteilung von vier Ziffern auf vier Stellen. Der Fachausdruck dafür heißt „Permutation“ (Vertauschung ohne Wiederholung): Alle Elemente der Menge der vier Ziffern werden benötigt, keine Ziffer darf mehrfach vorkommen und die Reihenfolge der Anordnung ist zu beachten. Es gilt: $P4 = n! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Es gibt also 24 Möglichkeiten für die PIN.

In der Grundschule geht es noch nicht um das Finden oder Benutzen der Formel. Eine übersichtliche Aufstellung der möglichen PINs hilft, einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der möglichen Lösungen und der Anzahl der Ziffern zu erkennen.

Wie kann man vorgehen?

Es bietet sich an, die Aufgabe mit der ganzen Klasse zu besprechen, um folgende Fragen zu klären: Was ist eine Handypin? Bei einer Handypin können auch Ziffern mehrfach auftreten, warum ist bei dieser Aufgabe nicht möglich?

In Partnerarbeit gehen die Schüler/innen bei der Suche nach der Anzahl der möglichen Kombinationen selbständig vor, systematische Vorgehensweisen oder auch völlig unsystematische sind möglich. Systematisches Vorgehen schafft Übersicht bei der Frage, ob man alle Kombinationsmöglichkeiten gefunden hat. In einem zweiten Arbeitsschritt wird mit dem Hinweis „Stellt eure Lösung so da, dass man sofort erkennen kann, dass Ihr alle Lösungen gefunden habt.“ nach einer möglichst übersichtlichen Lösung gesucht.

Am Ende der Arbeitsphase stellen die Schüler/innen ihre geordneten Lösungen vor. Sie beschreiben und begründen ihr Vorgehen und erklären, warum sie sicher erkennen können, dass sie alle Kombinationen erfasst haben. Das Beschreiben mathematischer Zusammenhänge fördert das Verständnis derselben.

Weiterarbeit

Alternativ zur Handypin kann man auch die Zahlenkombinationen von Fahrradschlössern als Aufgabenstellung wählen.

Es kann nach Kombinationsmöglichkeiten mit fünf oder sogar sechs Ziffern gesucht werden. Aber Vorsicht: Die Zahl der möglichen Lösungen wächst rasant, eine übersichtliche Darstellung ist unerlässlich.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Daten und Zufall

Anforderung
Anordnungen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen

Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
4 bis 6

28 Siegerehrung

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Daten und Zufall

Anforderung
Einfache kombinatorische Aufgaben lösen

Allgemeine mathematische Kompetenz
PROBLEMLÖSEN: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Klassenstufe
2 bis 4
JÜL-geeignet

a Wie viele Möglichkeiten der Platzierungen gibt es? Schätze zuerst.
b Beschreibe deinen Lösungsweg im Forscherheft.

Worum geht es?
Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um eine Fragestellung aus dem Bereich der Kombinatorik. Die Aufgabenstellung entspringt der Alltagswelt der Kinder und ist für den Einstieg in kombinatorische Aufgaben geeignet.
Es gibt drei Tiere, die auf dem Siegerpodest verteilt werden müssen (Plätze 1 bis 3). Jedes Tier kann Sieger werden, es gibt also drei mögliche Sieger. Dann gibt es noch zwei Tiere, die nicht Sieger sind und somit den zweiten Platz belegen könnten. Auf dem dritten Platz ist der, der noch übrig bleibt.

Es gibt also 3 mal 2 mal 1 = 6 Möglichkeiten:

1.	2.	3.
Tiger	Pferd	Schaf
Tiger	Schaf	Pferd
Pferd	Tiger	Schaf
Pferd	Schaf	Tiger
Schaf	Tiger	Pferd
Schaf	Pferd	Tiger

Die Lösungen können durch eigenes Handeln gefunden werden. Skizzen oder/und tabellarische Aufstellungen fördern das systematische Vorgehen und helfen, den Überblick zu behalten. Kommt ein viertes Tier dazu, erweitern sich die Möglichkeiten beträchtlich. Es gibt vier Tiere, die auf Platz 1 sein könnten. Dann bleiben drei Tiere übrig, die den zweiten Platz belegen könnten und für den dritten Platz gibt es noch zwei Möglichkeiten. Es sind also 4 mal 3 mal 2 = 24 Möglichkeiten. Für fünf Tiere gibt es analog 5 mal 4 mal 3 = 60 Möglichkeiten.

Wie kann man vorgehen?
Die Aufgabe wird gemeinsam gelesen und Begriffe (z. B. Platzierung) geklärt. Anschließend schätzen die Kinder, wie viele Möglichkeiten der Platzierung es geben könnte. Hierdurch wird das Entwickeln von Vorstellungen über den Zusammenhang der Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten unterstützt. Beim nächsten Schritt ist es sinnvoll, Material zu benutzen und den Kindern ausreichend Zeit zu geben, damit sie handelnd verschiedene Lösungsmöglichkeiten ausprobieren können.
Die Dokumentation der Lösungsmöglichkeiten erfolgt im Forscher- oder Mathematikheft. Dabei wird festgehalten, wie die Kinder zu ihrer Lösung gekommen sind (z. B. durch Ausprobieren der verschiedenen Möglichkeiten, durch eine Zeichnung oder eine Tabelle). Besonders bei leistungsstärkeren Schülern wird eine systematische Darstellung (Tabelle, Baumdiagramm) angeregt. Die Vertiefungsvorschläge können anschließend von allen bearbeitet werden oder aber nur von besonders interessierten Schülern. Im abschließenden gemeinsamen Gespräch werden die einzelnen Strategien verbalisiert und diskutiert.

Weiterarbeit
Für die Weiterarbeit bieten sich vertiefende Fragestellungen an: Ein viertes Tier kommt mit in die Auswahl. Wie viele Möglichkeiten der Platzierungen von Platz 1 bis 3 gibt es jetzt auf dem Siegertreppchen? Oder: Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn ein fünftes, sechstes … Tier hinzugefügt wird?

29 Gummibärchen

Was hat eine Tüte Gummibärchen mit Mathematik zu tun?
Sammelt Fragen und Ideen und schreibt sie auf ein DIN A4-Blatt.

Findet euch zu dritt oder viert in einer Arbeitsgruppe zusammen. Stellt euch eure Fragen und Ideen nacheinander vor. Überlegt gemeinsam: Welche Fragen sind leicht, welche sind schwer zu lösen? Welche der Fragen können mathematisch gelöst werden? Welche Fragen können ohne zusätzliche Informationen nicht gelöst werden? Welche Fragen können nur mit Hilfsmitteln (z. B. Waage) gelöst werden? Können euch Informationen auf der Verpackung beim Lösen der Aufgaben helfen? Wählt die Fragen aus, die euch besonders interessieren und findet gemeinsam Lösungen. Schreibt den Lösungsweg auf.

Worum geht es?
Im Vordergrund der Aufgabe steht eine Sache aus dem Erfahrungsbereich der Schüler, zu der alle Kinder einen Bezug haben. Die Frage „Was hat eine Tüte Gummibärchen mit Mathematik zu tun?“ fordert dazu auf, Fragestellungen selbst zu entwickeln – eine in der Schule häufig noch ungewohnte Herausforderung. Die Aufgabenstellung ist bewusst offen gehalten, um die Schüler zu sensibilisieren und ihren Blick für Mathematik zu schärfen: „Mathematik ist überall“.
Bereits im Vorfeld müssen die Schüler Überlegungen anstellen und Entscheidungen treffen: Was interessiert mich an dem Thema? Was will ich wissen? Welche Informationen brauche ich? Wie finde ich die Lösung? Da möglicherweise nicht alle benötigten Daten zur Verfügung stehen, ist es unter Umständen notwendig, auf vertrautes Alltagswissen zurückzugreifen oder die Daten durch Recherchen einzubringen. Bei der Bearbeitung der Aufgabe lernen die Schüler sachbezogene Fragestellungen zu entwickeln, Alltagswissen zu benutzen und sie vertiefen ihre Fähigkeit im Umgang mit Größen.
Die Aufgabe regt die Kinder an, sich kreativ mit ihrer Umwelt auseinanderzusetzen und zu erfahren, dass in jeder „Sache“ auch ein mathematischer Lernaspekt stecken kann. Sie zeigt den Schülern, dass Mathematik nicht nur aus Formeln und Zahlen besteht, sondern sehr vielseitig sein kann. Sie bietet die Möglichkeit, sich unter unterschiedlichen Aspekten mit dem Sachverhalt auseinander zu setzen (Gewicht, Länge, Kombinatorik, Division, Geometrie u. v. m.) und einen anderen Zugang zu alltäglichen Dingen der Umgebung zu gewinnen.

Wie kann man vorgehen?
In einem gemeinsamen Gespräch im Stuhlkreis werden mit Unterstützung einer konkret vorhandenen Tüte Gummibärchen einige (nicht zu viele!) Ideen für Fragestellungen gesammelt. Eventuell wird die Zusammensetzung der später benötigten Arbeitsgruppen schon hier geklärt und die anschließende Arbeit organisiert.
In Einzelarbeit werden weitere Fragestellungen zur Tüte Gummibärchen entwickelt. Dann bearbeiten die Schüler den Auftrag in Arbeitsgruppen: Ideen austauschen, kategorisieren, gute Ideen auswählen, gemeinsam Lösungswege finden, notieren. Die Tüte Gummibärchen kann geöffnet, aber (noch) nicht verzehrt werden.
An die Gruppenarbeitsphase schließt auf jeden Fall eine gemeinsame Phase im Stuhlkreis oder in der Kinositzordnung vor der Tafel an. Jede Gruppe stellt ihre Arbeitsergebnisse vor. Falls es Aufgaben gibt, die einigen Schülern als nicht lösbar erschienen sind, wird gemeinsam nach einem Weg gesucht, wie man vorgehen könnte.
Falls der Eindruck entsteht, die Schüler würden durch den schriftlichen Arbeitsauftrag zu sehr gesteuert, kann darauf selbstverständlich verzichtet werden.

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Größen und Messen

Anforderung
Zu Sachsituationen Fragestellungen entwickeln

Allgemeine mathematische Kompetenz
MODELLIEREN: Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Klassenstufe
2 bis 4

Material
– pro Gruppe eine Tüte Gummibärchen

30 Was bedeutet DIN A4?

Rahmenlehrplanbezug

Themenfeld
Größen und Messen

Anforderung
Daten zu Größen auf unterschiedliche Art gewinnen, aufbereiten und Aussagen dazu treffen

Allgemeine mathematische Kompetenz
ARGUMENTIEREN: Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

Klassenstufe
3 bis 4

Literatur
http://www.din-formate.de/reihe-a-din-groessen-mm-pixel-dpi.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Papierformat

→ Kopiervorlage im Anhang

Du siehst hier eine Tabelle, in der die Längen- und Breitenangaben zu den wichtigsten Papierformaten aufgeschrieben sind.

Papierformat	**Länge**	**Breite**
A0		
A1		
A2		
A3	420 mm	297 mm
A4	297 mm	210 mm
A5	210 mm	148 mm
A6		
A7		
A8		

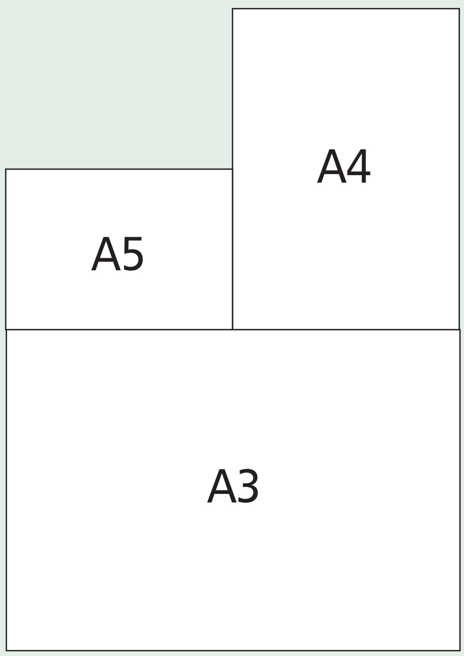
1 Überlege und notiere, welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Tabelleneinträgen bestehen.
2 Berechne die Längen- und Breitenangaben (Achtung: es muss manchmal auf ganze mm gerundet werden!) der fehlenden Papiergrößen von A0 bis A8 und fertige eine neue Tabelle an.
3 Finde weitere zusammenhängende Zahlen und markiere sie farbig.
4 Begründe deine Entdeckungen. Kannst du z.B. erklären, warum die Länge von A3 genau das Doppelte der Länge von A5 ist?

Worum geht es?
Überall begegnen uns im täglichen Leben Formate, die der DIN-Norm 476 entsprechen: Postkarten, Karteikarten usw. Vor allem durch Hefte und Zeichenpapier sind die Bezeichnungen DIN A5 und DIN A4 vielen Schülern geläufig. Der erste Zugang zu einer systematischen Untersuchung wird sicherlich das Falten sein, das zu der überraschenden Erkenntnis führt, dass man mit einer Faltung auf die Hälfte stets exakt das nächst kleinere DIN A-Blatt erhält (Flächenhalbierung unter Aufrechterhaltung der Proportion Länge-Breite). Mit Hilfe von Tabelle und Größenmodell gilt es herauszufinden, in welchen Beziehungen die Abmessungen zueinander stehen.
So wird z.B. beim Falten schon deutlich, dass jeweils die halbierte Länge des größeren DIN A-Blattes gleich der Breite des nächst kleineren ist bzw. die Breite des größeren DIN-Formats immer der Länge des nächst kleineren Formates entspricht. Das Größenmodell in der Abbildung verdeutlicht, dass alle kleineren DIN A-Blätter zusammen in das nächste größere (flächenmäßig) hineinpassen.
Die tabellierten Angaben bieten Gelegenheit, dies zu überprüfen und auf der Basis dieses Wissens die fehlenden Angaben rechnerisch zu ergänzen. Hinweise auf die notwendigen Rundungen sind an dieser Stelle unumgänglich. Ist dies geschehen, so öffnet sich die Möglichkeit, vielfältige Zahlenzusammenhänge in der Tabelle zu erkennen.
Es kann beispielsweise deutlich werden, dass die Seitenlänge eines A3-Blattes genau der zweifachen Seitenlänge eines A5-Blattes entspricht. Eine Begründung dafür ergibt sich aus zuvor gemachten Handlungserfahrungen beim Falten und schafft die Voraussetzungen für eine Verallgemeinerung. Darüber hinaus gilt es zu entdecken, dass der Ausgangspunkt A0 gerade den Flächeninhalt 1 m² aufweist.

Wie kann man vorgehen?
Um ein Verständnis der Beziehungen zwischen den DIN-Angaben zu entwickeln, müssen die Schüler zunächst Handlungserfahrungen mit den Formaten machen. Größenvergleiche durch Falten von DIN-A-formatigen Papierblättern oder durch Abmessen und Vergleichen von Seitenlängen können hier ebenso hilfreich sein wie das Vergleichen von unterschiedlichen Flächengrößen: Wie oft passt ein DIN A6-Blatt in ein DIN A4-Blatt hinein? Eine systematische Visualisierung der unterschiedlichen Flächen an der Tafel durch Papiermodelle (vgl. Abbildung) hilft hier sehr.
Die rechnerische Erweiterung der Tabelle auf der Basis dieses Erfahrungshorizontes stellt dann die Grundlage für ein systematisches Verstehen der Beziehungen zwischen den einzelnen Angaben dar. Das reine Ausrechnen der fehlenden Angaben und das Entdecken von Zahlenmustern stellen schon eine Herausforderung dar.
Für leistungsstarke Schüler bietet es sich an, über die erkannten Muster nachzudenken und die Überlegungen und mathematischen Zusammenhänge aufzuschreiben.

Mögliche Aussagen können dabei z. B. sein:
- „Die Breite eines DIN-A-Bogens ist gleich der Länge des nächst kleineren."
- „Die Fläche eines DIN-A4-Blattes ist viermal so groß wie die eines DIN-A6-Blattes, weil Länge und Breite jeweils halbiert sind."
- „Wenn man die DIN-A-Reihe fortsetzt, dann ergeben alle kleineren Bögen zusammen gerade die Fläche des nächst größeren in der Reihe."

Solche Aussagen dokumentieren ein tieferes Verstehen der Beziehungen der Angaben in der gegebenen Tabelle.
Wichtig ist in jedem Fall ein ausführliches Unterrichtsgespräch, in dem alle Schüler ihre Erfahrungen und Erkenntnisse formulieren können. Dies wird am Beispiel der DIN A-Formate besonders ertragreich und vielfältig sein, weil auch weniger leistungsstarke Schüler Zusammenhänge erkennen werden und diese auch durch Falten und praktisches Vergleichen begründen können.
Um das Besondere des DIN A-Formats sichtbar zu machen, ist es natürlich wichtig, Beispiele zu haben, die nicht über die speziellen Eigenschaften verfügen. Dazu können Zeitschriften, Zeitungen, Umschläge, Haushaltspapier jeder Art etc. dienen.



Kopiervorlagen

Die Nummerierung der Kopiervorlagen orientiert sich zur besseren Übersicht an der Nummerierung der Lernumgebungen. Allerdings weicht die Reihenfolge aus Platzgründen hin und wieder davon ab. In der folgenden Liste finden Sie die Kopiervorlagen in der Reihenfolge ihres Erscheinens:

1 **Kombinieren im Kästchenraster**

2 **Dreiecke entdecken**

3 **Würfelnetze**

7 **Terrasse mit Obstbaum**

4 (1) **Pentomino-Kalender**
(2) **Pentomino-Kalender**

10 **Zahlenfeld**

12 **Eicheln sammeln**

13 **Mal-Plus-Haus**

15 **Schriftliche Addition**

16 **Schöne Päckchen**

17 **Zahlenmauerbau**

18 **Zahlen jagen**

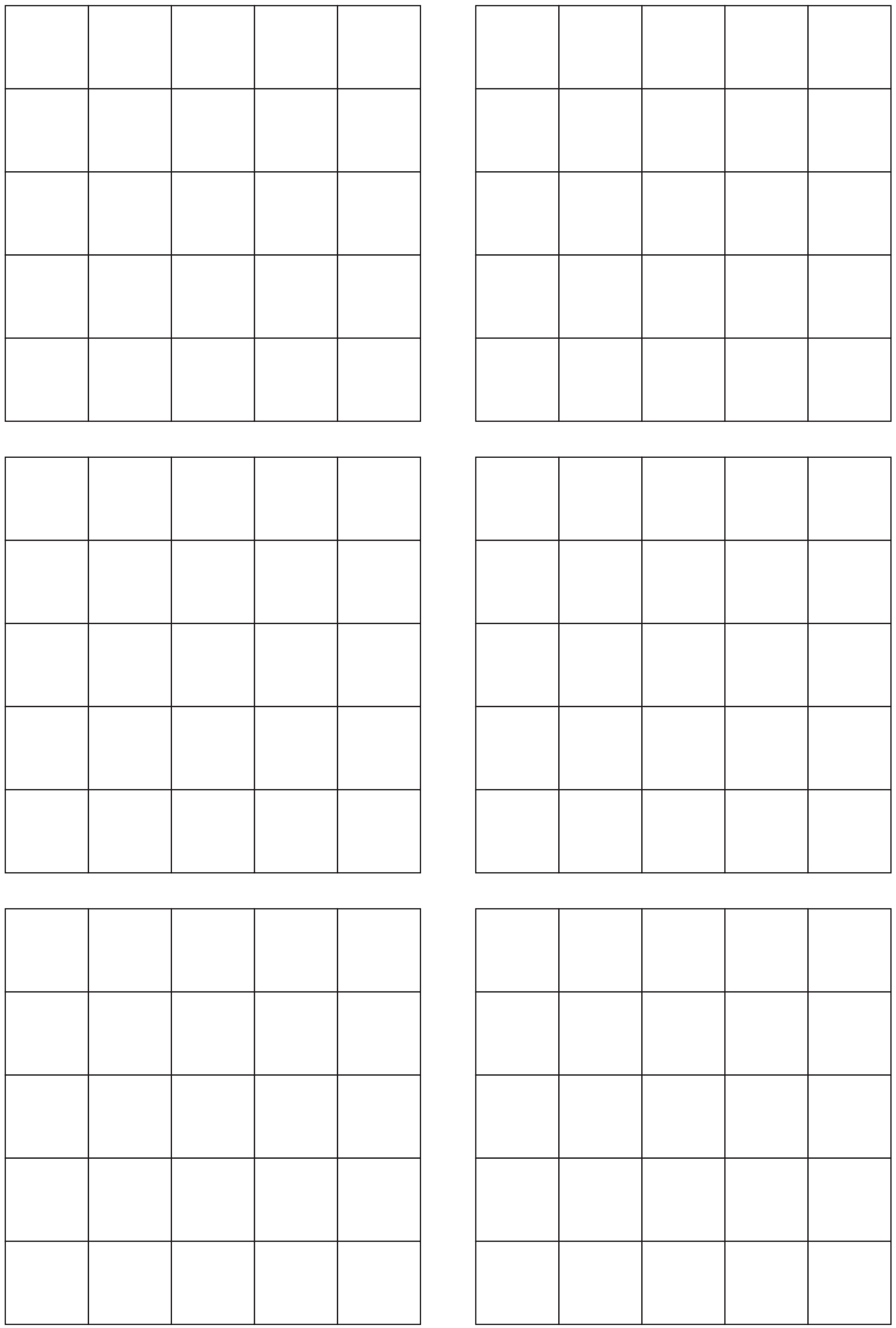
21 **Kreuz-Zahlen auf der Hundertertafel**

23 (1) **Das geheimnisvolle Viereck**
(2) **Das geheimnisvolle Viereck**

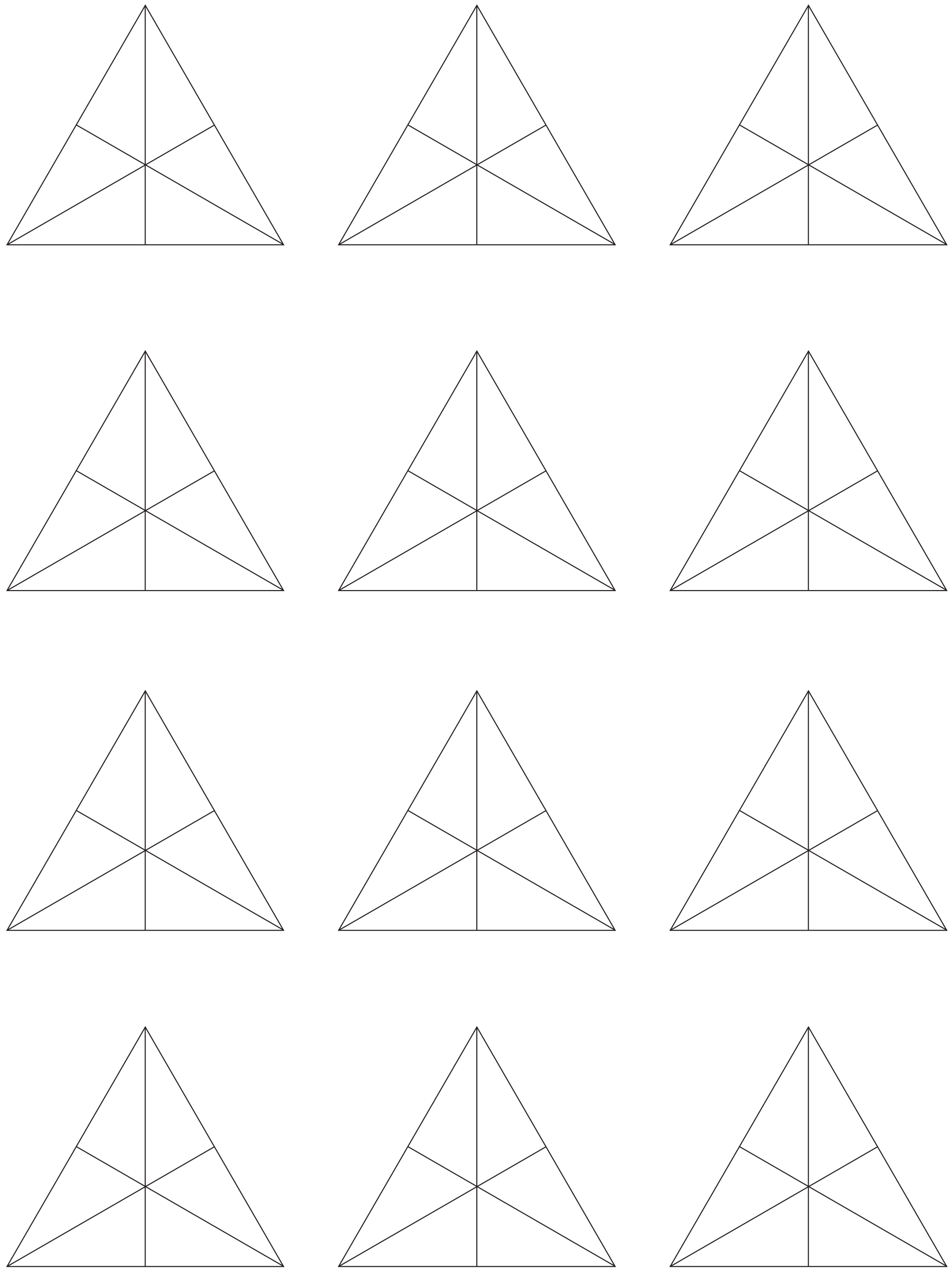
24 **Herr Durchblick stand auf der Leiter**

30 **Was bedeutet DIN A4?**

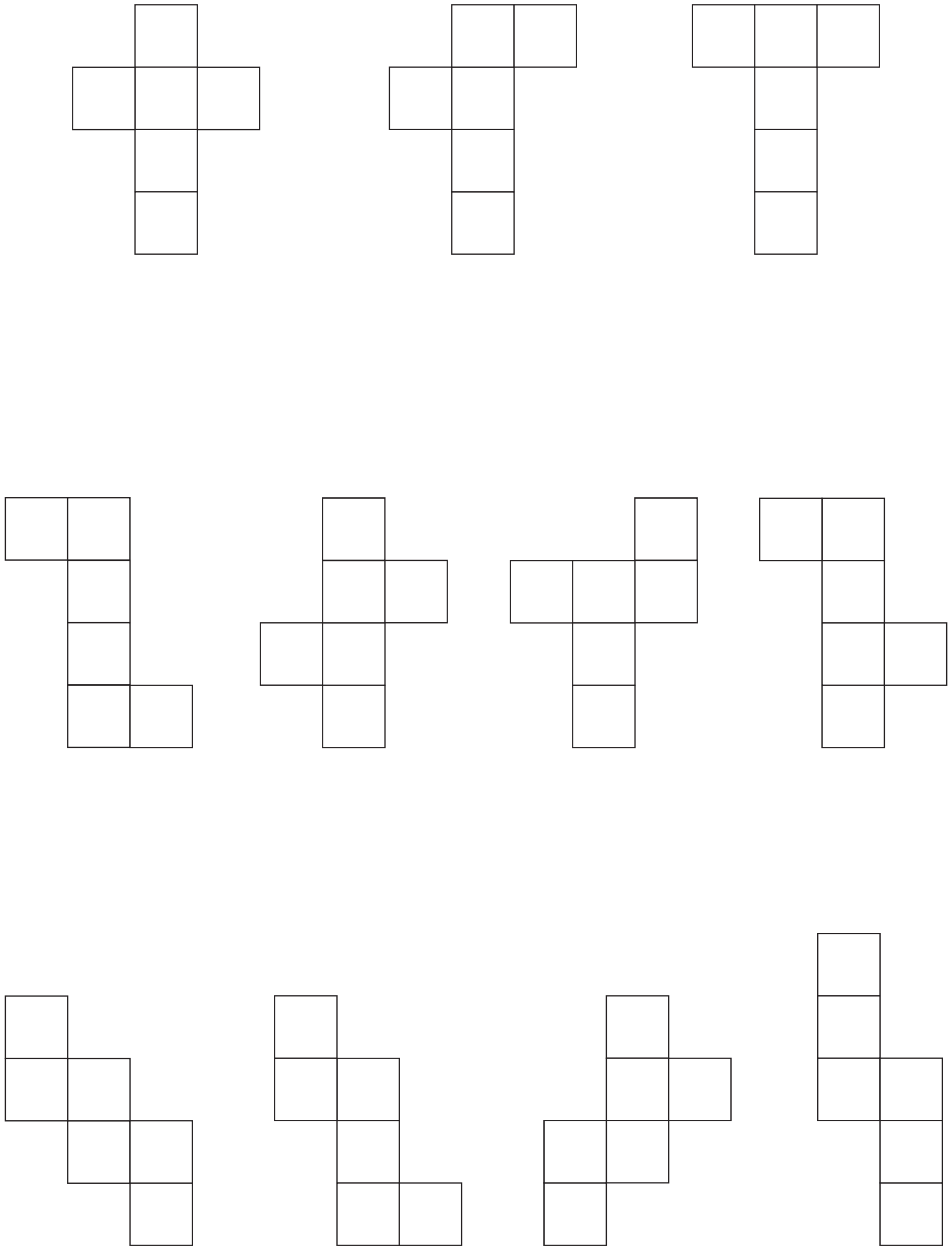
1 Kombinieren im Kästchenraster



2 Dreiecke entdecken

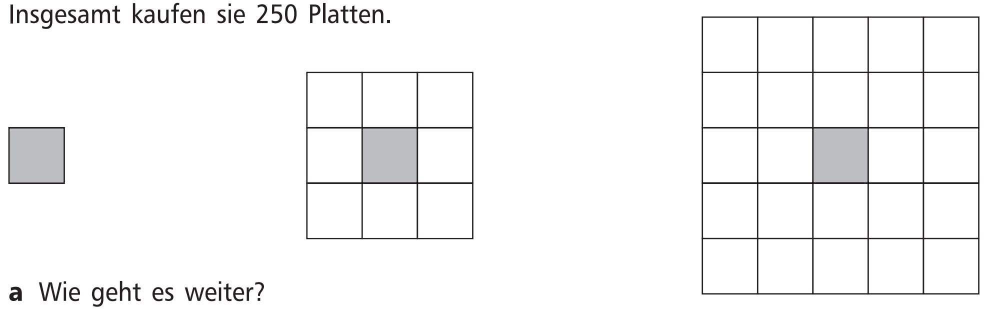


3 Würfelnetze



7 Terrasse mit Obstbaum

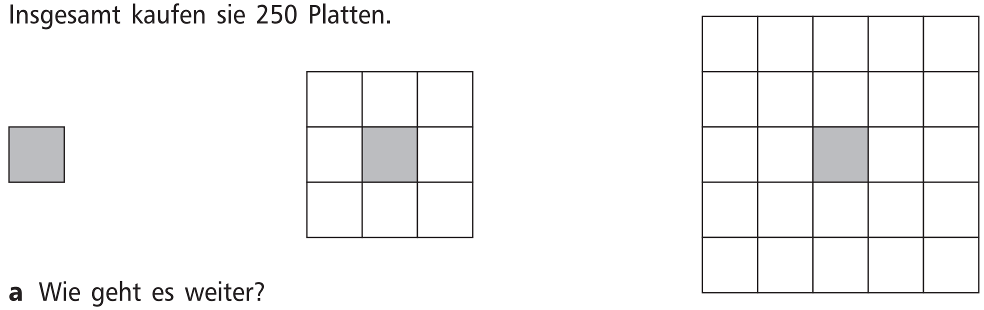
Familie Lohmann will mit quadratischen Steinplatten eine neue Gartenterrasse verlegen. In der Mitte steht ein alter Obstbaum, der an dieser Stelle auch stehen bleiben soll. Sie verlegen also die Platten immer um den Baum herum.
Insgesamt kaufen sie 250 Platten.



a Wie geht es weiter?
b Wie viele Runden können sie mit den 250 Platten legen?
c Wie wächst die Gesamtanzahl der verlegten Platten?
Beschreibe deine Beobachtungen.
d Wie wächst die Anzahl der jeweils neu verlegten Platten?
Beschreibe deine Beobachtungen.
e Kann der Baum in der Mitte stehen, wenn man eine Seitenlänge von 16 Platten hat? Begründe.

7 Terrasse mit Obstbaum

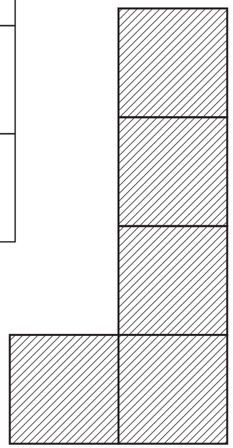
Familie Lohmann will mit quadratischen Steinplatten eine neue Gartenterrasse verlegen. In der Mitte steht ein alter Obstbaum, der an dieser Stelle auch stehen bleiben soll. Sie verlegen also die Platten immer um den Baum herum.
Insgesamt kaufen sie 250 Platten.

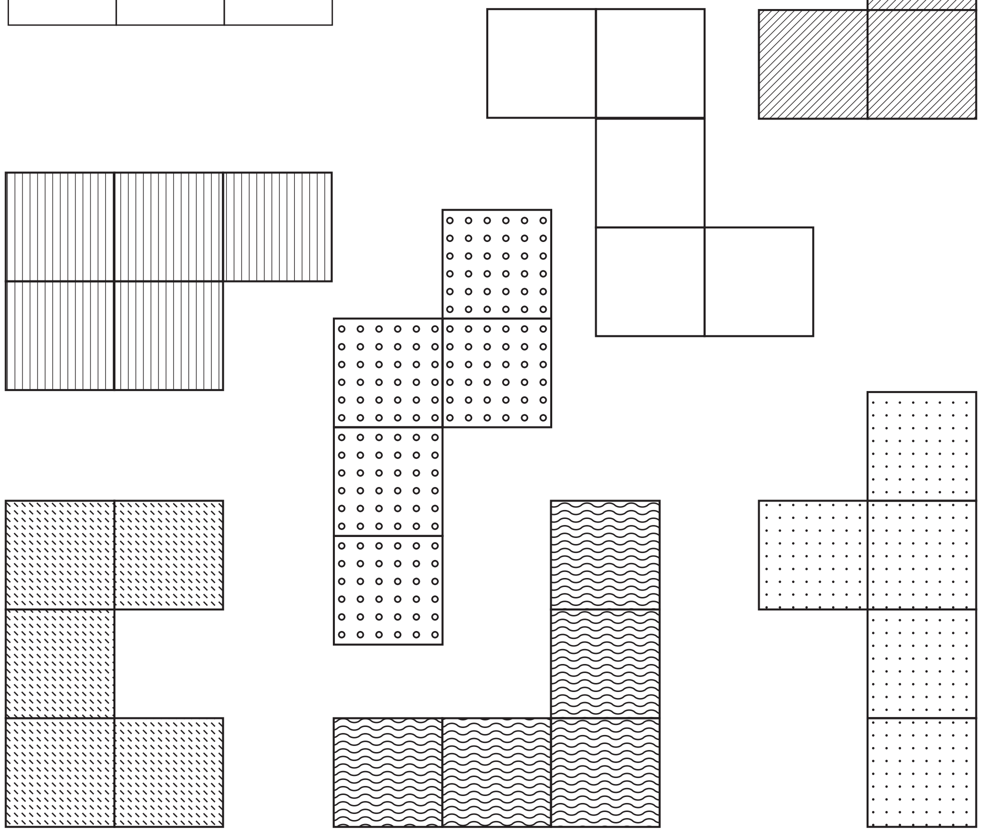


a Wie geht es weiter?
b Wie viele Runden können sie mit den 250 Platten legen?
c Wie wächst die Gesamtanzahl der verlegten Platten?
Beschreibe deine Beobachtungen.
d Wie wächst die Anzahl der jeweils neu verlegten Platten?
Beschreibe deine Beobachtungen.
e Kann der Baum in der Mitte stehen, wenn man eine Seitenlänge von 16 Platten hat? Begründe.

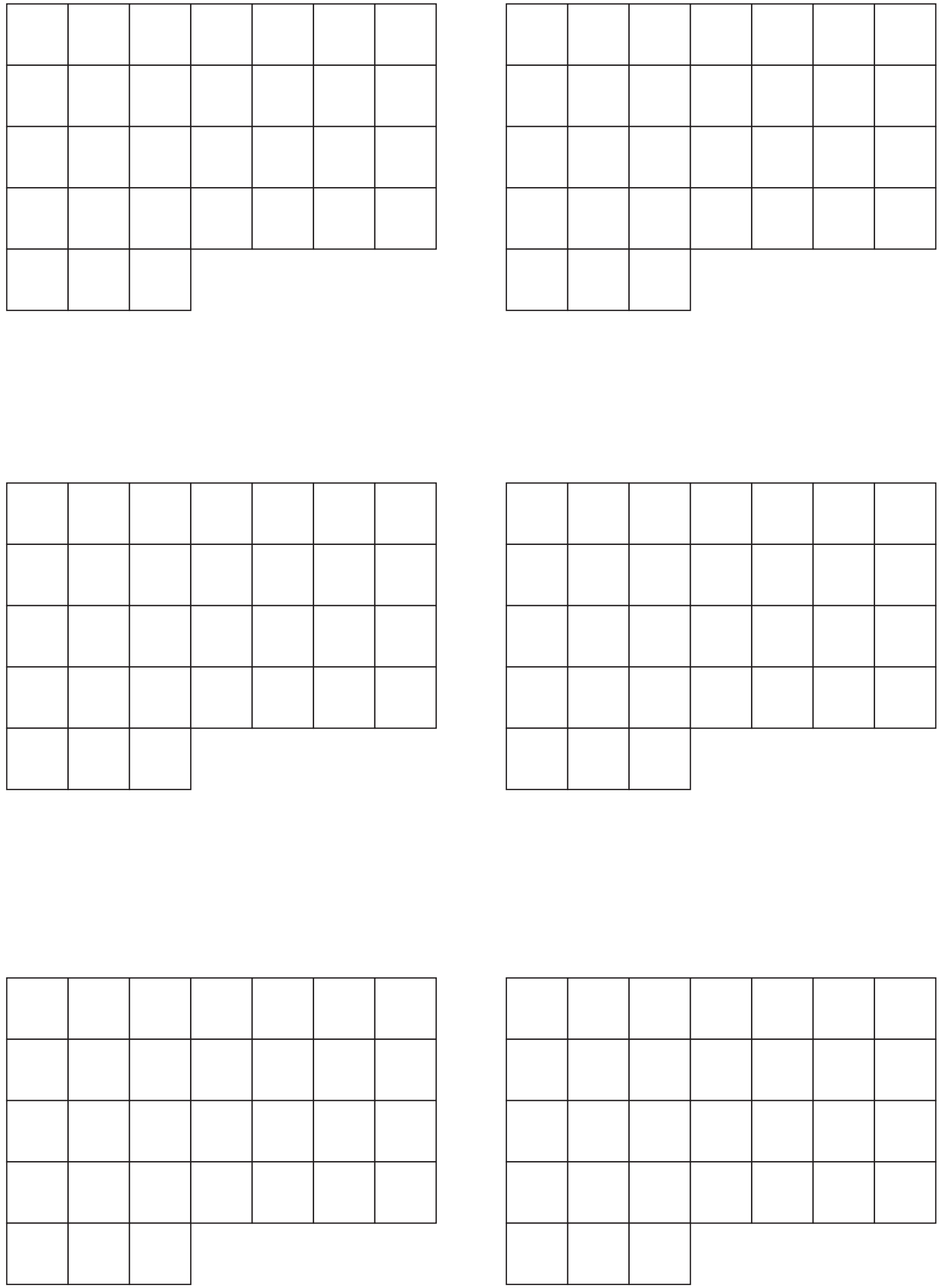
4 Pentomino-Kalender (1)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				





4 Pentomino-Kalender (2)



10 Zahlenfeld

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

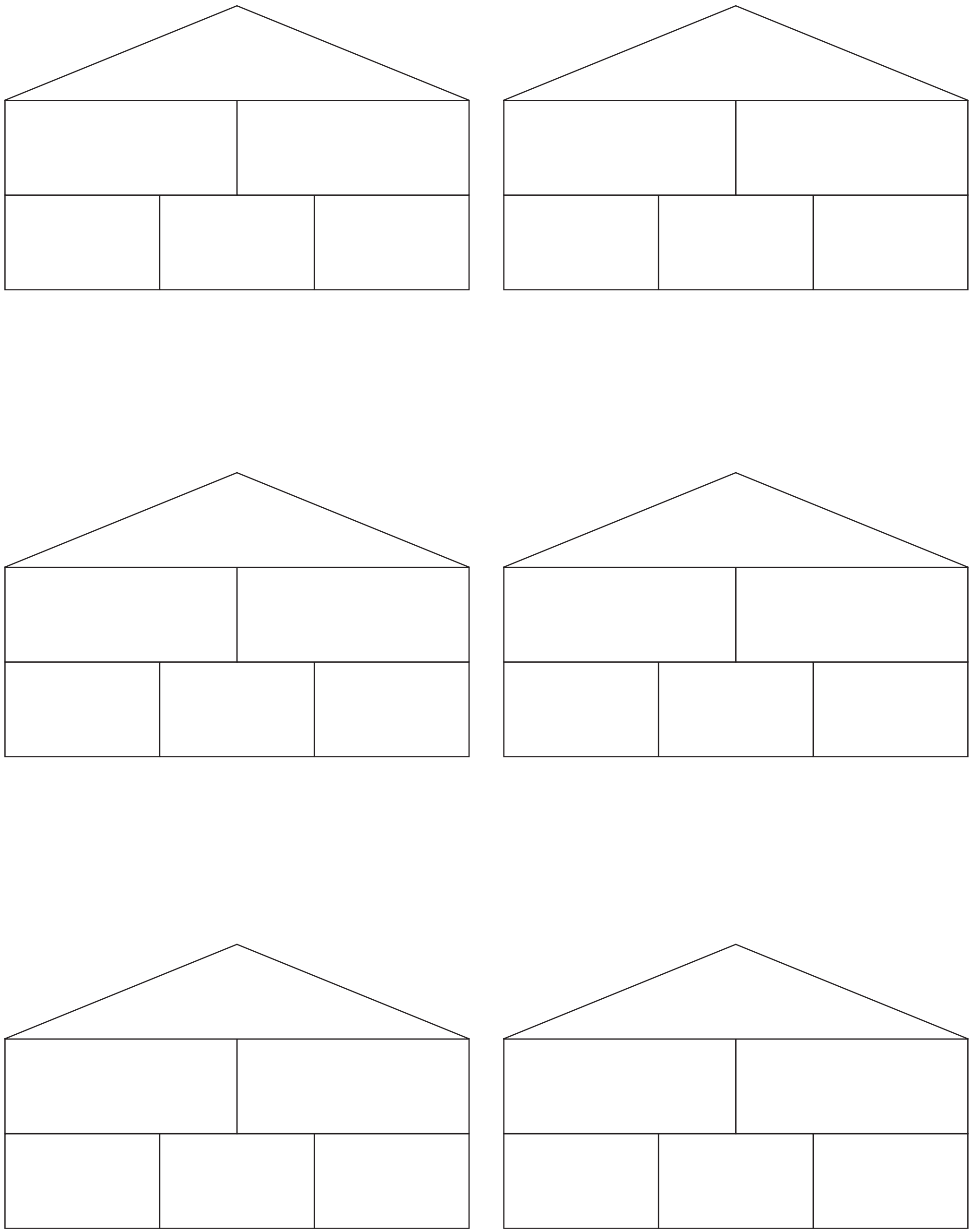
12 Eicheln sammeln
Ein Eichhörnchen begann am Montag Eicheln zu sammeln:
Am Dienstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Montag.
Am Mittwoch sammelte es drei Eicheln mehr als am Dienstag.
Am Donnerstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Mittwoch.
Am Freitag sammelte es drei Eicheln mehr als am Donnerstag.
Am Freitag hatte es 50 Eicheln.
Wie viele Eicheln hat das Eichhörnchen jeden Tag gesammelt?

12 Eicheln sammeln
Ein Eichhörnchen begann am Montag Eicheln zu sammeln:
Am Dienstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Montag.
Am Mittwoch sammelte es drei Eicheln mehr als am Dienstag.
Am Donnerstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Mittwoch.
Am Freitag sammelte es drei Eicheln mehr als am Donnerstag.
Am Freitag hatte es 50 Eicheln.
Wie viele Eicheln hat das Eichhörnchen jeden Tag gesammelt?

12 Eicheln sammeln
Ein Eichhörnchen begann am Montag Eicheln zu sammeln:
Am Dienstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Montag.
Am Mittwoch sammelte es drei Eicheln mehr als am Dienstag.
Am Donnerstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Mittwoch.
Am Freitag sammelte es drei Eicheln mehr als am Donnerstag.
Am Freitag hatte es 50 Eicheln.
Wie viele Eicheln hat das Eichhörnchen jeden Tag gesammelt?

12 Eicheln sammeln
Ein Eichhörnchen begann am Montag Eicheln zu sammeln:
Am Dienstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Montag.
Am Mittwoch sammelte es drei Eicheln mehr als am Dienstag.
Am Donnerstag sammelte es drei Eicheln mehr als am Mittwoch.
Am Freitag sammelte es drei Eicheln mehr als am Donnerstag.
Am Freitag hatte es 50 Eicheln.
Wie viele Eicheln hat das Eichhörnchen jeden Tag gesammelt?

13 Mal-Plus-Haus



15 Schriftliche Addition

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0

16 Schöne Päckchen

Rechne aus und setze fort:

57 + 48 =	57 – 36 =	12 · 7 =	72 : 9 =
57 + 43 =	58 – 37 =	13 · 6 =	64 : 8 =
57 + 38 =	59 – 38 =	14 · 5 =	56 : 7 =
+ =			
+ =			
+ =			

Beschreibe deine Beobachtungen. Verwende dabei möglichst Fachbegriffe.

16 Schöne Päckchen

Rechne aus und setze fort:

57 + 48 =	57 – 36 =	12 · 7 =	72 : 9 =
57 + 43 =	58 – 37 =	13 · 6 =	64 : 8 =
57 + 38 =	59 – 38 =	14 · 5 =	56 : 7 =
+ =			
+ =			
+ =			

Beschreibe deine Beobachtungen. Verwende dabei möglichst Fachbegriffe.

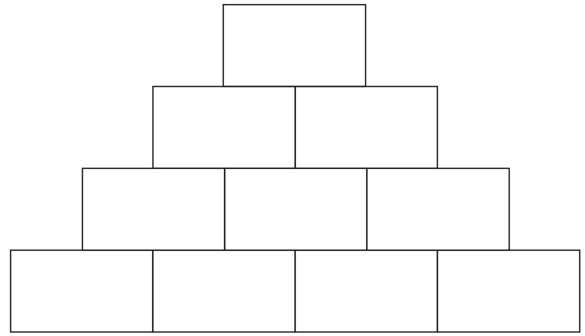
16 Schöne Päckchen

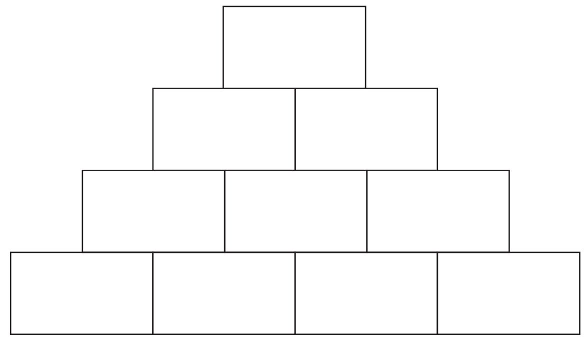
Rechne aus und setze fort:

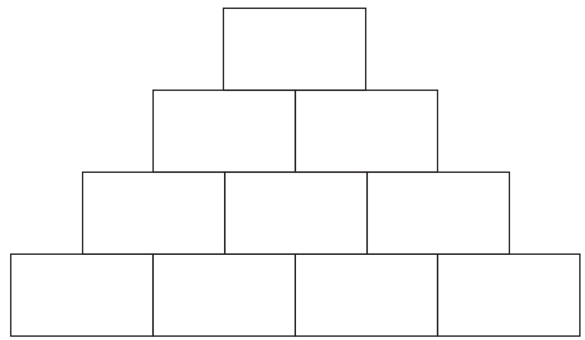
57 + 48 =	57 – 36 =	12 · 7 =	72 : 9 =
57 + 43 =	58 – 37 =	13 · 6 =	64 : 8 =
57 + 38 =	59 – 38 =	14 · 5 =	56 : 7 =
+ =			
+ =			
+ =			

Beschreibe deine Beobachtungen. Verwende dabei möglichst Fachbegriffe.

17 Zahlenmauerbau







18 Zahlen jagen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

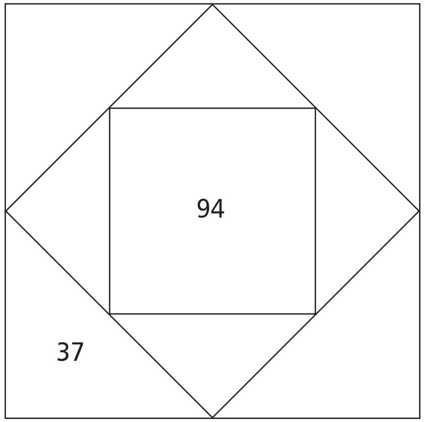
21 Kreuz-Zahlen auf der Hundertertafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

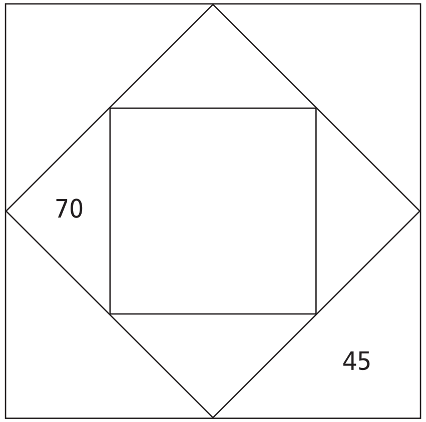
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

23 Das geheimnisvolle Viereck (1)

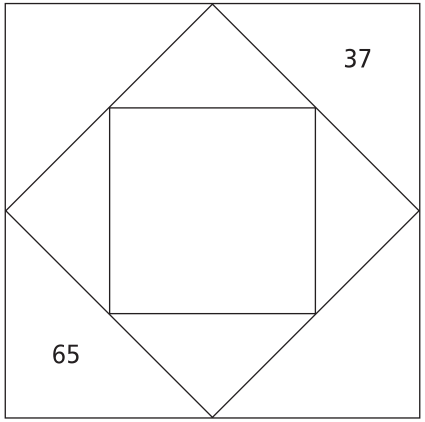
a)



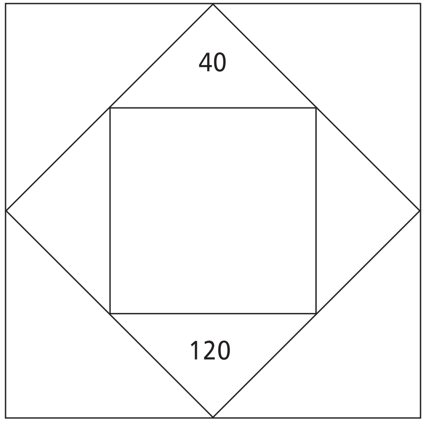
b)



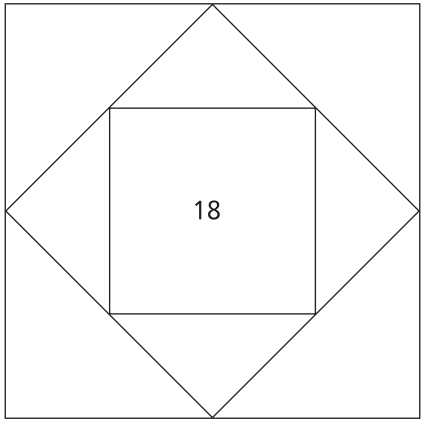
c)



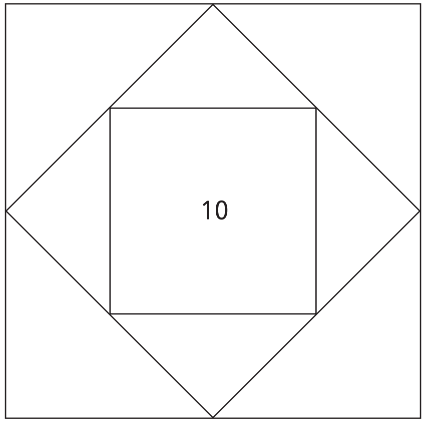
d)



e)

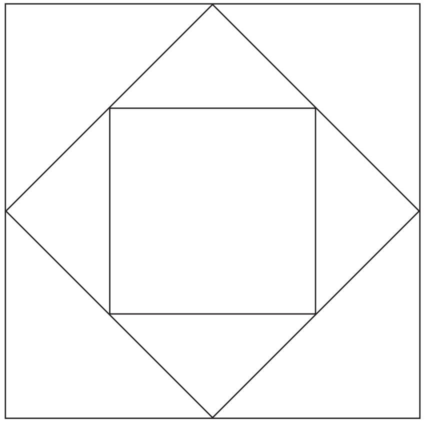


f)

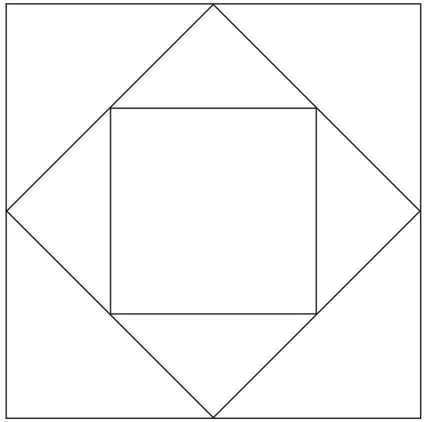


23 Das geheimnisvolle Viereck (2)

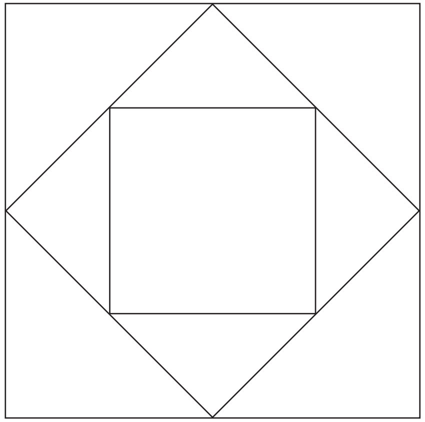
a)



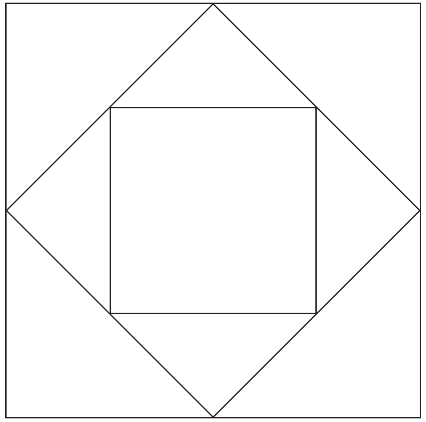
b)



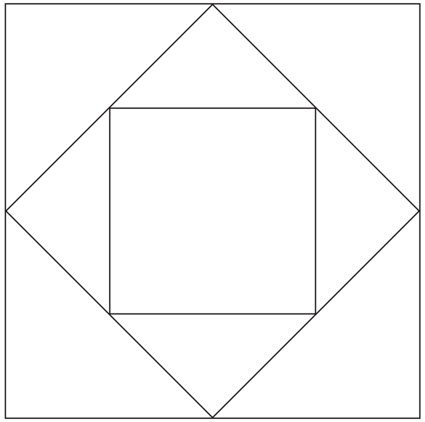
c)



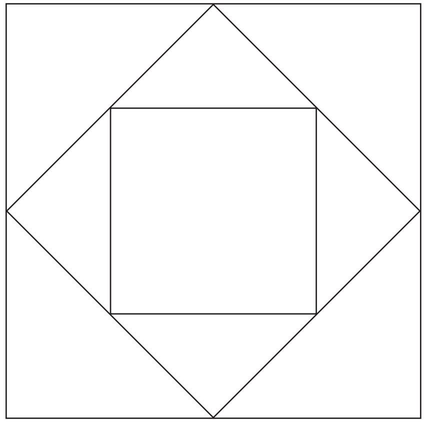
d)



e)



f)



24 Herr Durchblick stand auf der Leiter

Herr Durchblick stand auf der mittleren Sprosse einer Leiter. Er putzte die Fenster eines Bürogebäudes. Um noch mehr Fenster putzen zu können, stieg er drei Sprossen weiter hoch.

Da sah er, dass er unten ein Fenster vergessen hatte und stieg wieder fünf Sprossen herunter. Als er mit diesem Fenster fertig war, stieg er sieben Sprossen höher und putzte die übrigen Fenster. Als er fertig war, stieg er die restlichen sechs Sprossen bis ans Ende der Leiter hoch, um vom Dach des Gebäudes die schöne Aussicht zu genießen.

Wie viele Sprossen hat seine Leiter? Wie hast du gerechnet?

24 Herr Durchblick stand auf der Leiter

Herr Durchblick stand auf der mittleren Sprosse einer Leiter. Er putzte die Fenster eines Bürogebäudes. Um noch mehr Fenster putzen zu können, stieg er drei Sprossen weiter hoch.

Da sah er, dass er unten ein Fenster vergessen hatte und stieg wieder fünf Sprossen herunter. Als er mit diesem Fenster fertig war, stieg er sieben Sprossen höher und putzte die übrigen Fenster. Als er fertig war, stieg er die restlichen sechs Sprossen bis ans Ende der Leiter hoch, um vom Dach des Gebäudes die schöne Aussicht zu genießen.

Wie viele Sprossen hat seine Leiter? Wie hast du gerechnet?

24 Herr Durchblick stand auf der Leiter

Herr Durchblick stand auf der mittleren Sprosse einer Leiter. Er putzte die Fenster eines Bürogebäudes. Um noch mehr Fenster putzen zu können, stieg er drei Sprossen weiter hoch.

Da sah er, dass er unten ein Fenster vergessen hatte und stieg wieder fünf Sprossen herunter. Als er mit diesem Fenster fertig war, stieg er sieben Sprossen höher und putzte die übrigen Fenster. Als er fertig war, stieg er die restlichen sechs Sprossen bis ans Ende der Leiter hoch, um vom Dach des Gebäudes die schöne Aussicht zu genießen.

Wie viele Sprossen hat seine Leiter? Wie hast du gerechnet?

30 Was bedeutet DIN A4?

Du siehst hier eine Tabelle, in der die Längen- und Breitenangaben zu den wichtigsten Papierformaten aufgeschrieben sind:

Papierformat	**Länge**	**Breite**
A3	420 mm	297 mm
A4	297 mm	210 mm
A5	210 mm	148 mm

1 Überlege und notiere, welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Tabelleneinträgen bestehen.
2 Berechne die Längen- und Breitenangaben (Achtung: es muss manchmal auf ganze mm gerundet werden!) der fehlenden Papiergrößen von A0 bis A8 und fertige eine neue Tabelle an.
3 Finde weitere zusammenhängende Zahlen und markiere sie farbig.
4 Begründe deine Entdeckungen. Kannst du z. B. erklären, warum die Länge von A3 genau das Doppelte der Länge von A5 ist?

30 Was bedeutet DIN A4?

Du siehst hier eine Tabelle, in der die Längen- und Breitenangaben zu den wichtigsten Papierformaten aufgeschrieben sind:

Papierformat	**Länge**	**Breite**
A3	420 mm	297 mm
A4	297 mm	210 mm
A5	210 mm	148 mm

1 Überlege und notiere, welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Tabelleneinträgen bestehen.
2 Berechne die Längen- und Breitenangaben (Achtung: es muss manchmal auf ganze mm gerundet werden!) der fehlenden Papiergrößen von A0 bis A8 und fertige eine neue Tabelle an.
3 Finde weitere zusammenhängende Zahlen und markiere sie farbig.
4 Begründe deine Entdeckungen. Kannst du z. B. erklären, warum die Länge von A3 genau das Doppelte der Länge von A5 ist?

Literaturliste

Zitierte Literatur

Beutelspacher, Albrecht/Wagner, Marcus: Wie man durch eine Postkarte steigt; Herder 2010

Nitsch, Barbara: 1,2,3, Wackelzähne. In: Grundschule 05/2010; Westermann 2010

Nührenbörger, Marcus/Pust, Sylke: Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht; Kallmeyer 2006

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut: Wie Kinder rechnen; Klett 1997

Weiss, Ben: Diagramme erstellen. In: Praxis Grundschule 05/2010; Westermann 2010

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Handbuch produktiver Rechenübungen Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen; Klett 1992

Weitere empfehlenswerte Literatur für den Mathematikunterricht in der Grundschule

Dahl, Kristin/Nordquist, Sven: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate; Oetinger 1996

Enzensberger, Hans-Magnus: Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor Mathematik haben; DTV 1999

Fuchs, Mandy/Käpnick, Friedhelm: Mathe für kleine Asse 1/2; Cornelsen 2006

Gaidoschik, Michael: Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für Lehrer/-innen und Eltern; Persen 2008

Gaidoschik, Michael: Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis; Persen 2009

Grüssing, Meike/Peter-Koop, Andrea (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren; Mildenberger 2006

Hasemann, Klaus: Anfangsunterricht Mathematik; Spektrum Akademischer Verlag 2003

Hengartner, Elmar/Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht; Klett 2006

Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett/Kallmeyer 2008

Käpnick, Friedhelm: Mathe für kleine Asse 3/4; Volk und Wissen 2006

Leuder, Timo/Hefendahl-Herbeker/Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): Mathemagische Momente; Cornelsen 2009

Lorenz, Jens Holger: Kinder entdecken die Mathematik; Westermann 1997

Müller, Gerhard N./ Wittmann, Erich Chr. (Hrsg.): Mit Kindern rechnen; Grundschulverband 1995

Peter-Koop, Andrea/Ruwisch, Silke (Hrsg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule; Mildenberger 2003

Rasch, Renate: 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren; Kallmeyer 2003

Rasch, Renate: Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1/2 und 3/4. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen; Lernbuch Verlag/Kallmeyer 2007

Rathgeb-Schnierer, Elisabeth/Rechtsteiner-Merz, Charlotte: Mathematiklernen in der jahrgangsübergreifenden Eingangsstufe; Oldenbourg 2010

Scherer, Petra/Böning, Dagmar (Hrsg.): Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern; Grundschulverband 117

Schipper, Wilhelm: Handbuch für den Mathemaitkunterricht an Grundschulen; Schroedel 2009

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut: Kinder & Mathematik; Kallmeyer 2003

Sundermann, Beate/Selter, Christoph: Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben – Differenzierte Arbeiten – Ermutigende Rückmeldungen; Cornelsen 2006

Walther, Gerd u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret; Cornelsen 2008

Wieland, Gregor u. a.: Das Mathematikbuch – Lernumgebungen 5; Klett 2008

ders.: Das Mathematikbuch – Lernumgebungen 6; Klett 2009

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 1 bis 4. Lehrerband, Schülerband und ergänzende Materialien aus dem Programm Mathe 2000; Klett 1994

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins; Klett 1994