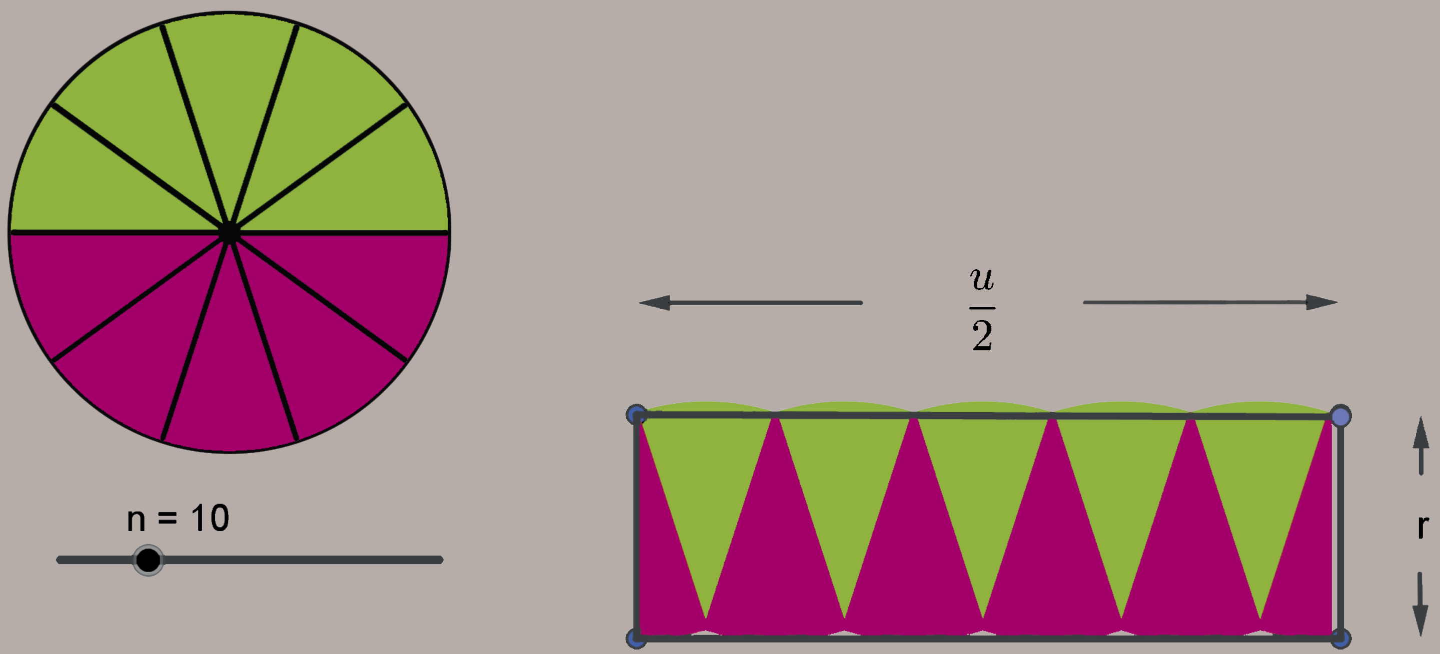
Senatsverwaltung
für Bildung, Jugend
und Familie

Berlin



Flächeninhalt des Kreises

$$A = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

GEOGEBRA

Die dynamische Mathematiksoftware
Anregungen für das Arbeiten im Unterricht der Sek I

Impressum

Herausgeber
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie
Bernhard-Weiß-Straße 6
10178 Berlin

Verantwortlich
Regina Ultze

Autor
Dr. Ulrich Döring

Redaktion
Ralf Punkenburg

Druck
Kern GmbH
In der Kolling 120
66450 Bexbach

Alle Abbildungen, soweit nicht anders angegeben, wurden vom Autor angefertigt.

1. Auflage 2019

Inhalt

Vorwort

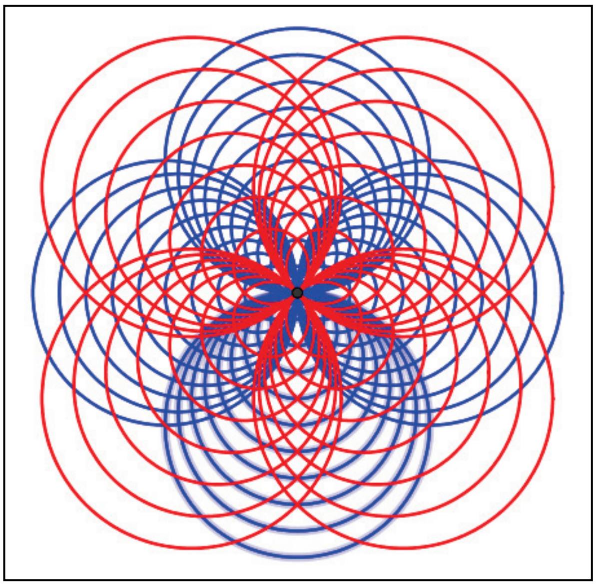
Liebe Kolleginnen und Kollegen,

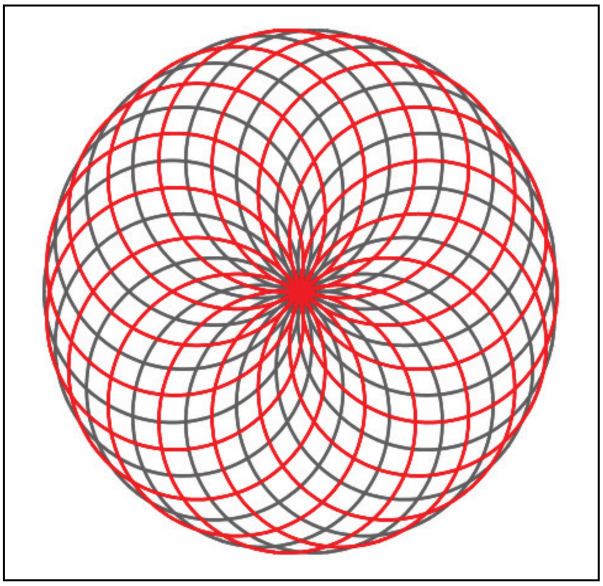
nach dem Erscheinen der Handreichung „Geogebra - die dynamische Mathematiksoftware - Anregungen für das Arbeiten im Unterricht der Sek II“ habe ich eine Reihe von positiven Rückmeldungen von Ihnen bekommen, über die ich mich natürlich sehr gefreut habe. Mehrere von Ihnen haben angeregt, dass ich eine entsprechende Abhandlung für den Einsatz von Geogebra in der Sek I schreiben solle. Diesem Wunsch komme ich gerne nach.

Natürlich wird der Einsatz von Geogebra in der Sek I nicht in der Intensität erfolgen können wie bei einem vollständig CAS-gestützten Unterricht in der Sek II. Ein Grund dafür ist u. a., dass die Abschlussprüfung in der 10. Klasse (MSA) noch rein händisch erfolgt. Darauf müssen die Schüler entsprechend vorbereitet werden. Deshalb spielt der CAS-Einsatz in dieser Abhandlung nur eine sehr untergeordnete Rolle. Lediglich im Wahlpflichtfach (z. B. beim Thema Matrizen) ist ein CAS-gestützter Unterricht aus meiner Sicht sinnvoll. Auf die Möglichkeiten, die Geogebra zur methodischen Bereicherung des Unterrichts bietet, sollte man aber auch in der Sek I keinesfalls verzichten. Dazu möchte ich Ihnen mit der folgenden Handreichung einige Anregungen geben. Zur Einstimmung sind unten zwei Logos abgebildet. Es sind zwei mögliche Lösungen zu der offenen Aufgabe „Zeichne viele Kreise durch einen Punkt!“.

An dieser Stelle möchte ich der GeoGebra GmbH danken, dass sowohl die Verwendung von Geogebraabbildungen in der Handreichung als auch das Hochladen von Geogebraarbeitsblättern in digitaler Form ohne das Anfallen von Lizenzgebühren genehmigt wurde.

Berlin, Oktober 2019 — Dr. Ulrich Döring





I. Einführung

Zeitgemäßer Mathematikunterricht sollte die vielfältigen Möglichkeiten nutzen, die dynamische Mathematiksoftwaresysteme bieten. Damit eröffnen sich andersartige „Zugangskanäle" bei der Vermittlung in Form von Visualisierungen, Animationen und Simulationen, die bei einer konventionellen Unterrichtsgestaltung nicht möglich sind. In dieser Handreichung werden Anregungen dafür unter Verwendung der kostenlosen und in über 60 Ländern der Erde verbreiteten dynamischen Mathematiksoftware „Geogebra" gegeben.

Im neuen RLP 1 – 10 werden die Medienbildung und die Bedeutung von Medien als Instrument des Lernens extra hervorgehoben. Für das Fach Mathematik bedeutet dies sicherlich u. a. den Einsatz dynamischer Mathematiksoftware an geeigneten Stellen im Unterricht.

Die im Folgenden beschriebenen Geogebraarbeitsblätter stehen allen Kolleginnen und Kollegen auf dem Bildungsserver zum Downloaden zur Verfügung. In dieser Handreichung wird zu den Arbeitsblättern jeweils ein kurzer didaktischer Kommentar angemerkt. Eine detaillierte Beschreibung zur Erstellung der Arbeitsblätter, wie sie bei der Durchführung zahlreicher Geogebraworkshops bei Lehrerfortbildungen eingesetzt und erprobt wurde, ist als Download verfügbar, um den Umfang der Handreichung im Rahmen zu halten. Um eine Einschätzung für diese Detailbeschreibungen zu vermitteln, ist für jede der Leitideen „Raum und Form", „Gleichungen und Funktionen" sowie „Daten und Zufall" exemplarisch eine Detailbeschreibung in dieser Handreichung angefügt.

Die Reihenfolge der Arbeitsblätter in der Abhandlung orientiert sich am zeitlichen Ablauf der Behandlung der jeweiligen Themengebiete (beginnend mit der Jahrgangsstufe 7 und endend mit der Jahrgangsstufe 10). Das Material deckt dabei repräsentative Teile in den Themengebieten "Raum und Form", "Gleichungen und Funktionen" sowie "Daten und Zufall" ab.

Nach den Arbeitsblättern zu den drei Leitideen werden zu 2 komplexeren Themengebieten („quadratische Funktionen mit Parametern" und „Sinusfunktionen mit Parametern") sogenannte „Geogebra-Lernumgebungen" vorgestellt. Es handelt sich hierbei um verlinkte Geogebraarbeitsblätter (sog. Geogebra-Books) anhand derer sich die Schüler den Stoff in Partnerarbeit relativ selbstständig erarbeiten können.

Am Ende der Handreichung werden zwei Anwendungen vorgestellt, die über den RLP hinausgehen und sich insbesondere für den Wahlpflichtunterricht eignen: Abbildungsgeometrie mithilfe von Matrizen und Anwendungsbeispiele für die Parameterdarstellung von Geraden und Parabeln. Zum Thema „Parameterdarstellung und Schieberegler" wird abschließend noch ein sehr schönes Kreativitätstraining in Form eines Geogebrabooks vorgestellt.

II. Raum und Form

1. Konstruktion von Ortslinien

Das folgende Geogebraarbeitsblatt eröffnet einen dynamischen Zugang zur Konstruktion der Mittelsenkrechten mithilfe des Spurmodus. Die Aufgabenstellung kann man z. B. folgendermaßen in einen Sachzusammenhang kleiden: Die ungefähr gleich großen Städte A und B sind nicht direkt miteinander verbunden, weil zwischen ihnen ein Sumpfgebiet liegt. Es soll ein Supermarkt gebaut werden, der von beiden Städten gleich weit entfernt ist. Auf welcher Linie kann man den Supermarkt errichten? Die Schüler kommen schnell darauf, dass man um die beiden Punkte A und B jeweils gleich große Kreise zeichnen muss, deren Schnittpunkte dann von A und B gleich weit entfernt sind. Durch Einführung eines Schiebereglers für den Kreisradius und die Aktivierung des Spurmodus für die Schnittpunkte ergeben sich Punkte auf der Mittelsenkrechten.

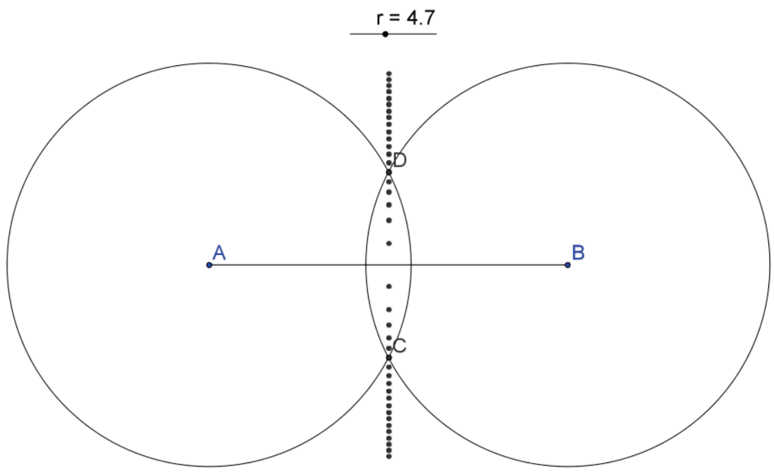


Abb. 1: Konstruktion der Mittelsenkrechten

Eine interessante Variation dieser Aufgabenstellung ergibt sich, wenn man vorgibt, dass die Stadt B doppelt so groß sei wie die Stadt A und dass deshalb der Supermarkt von A doppelt so weit entfernt sein soll wie von B.

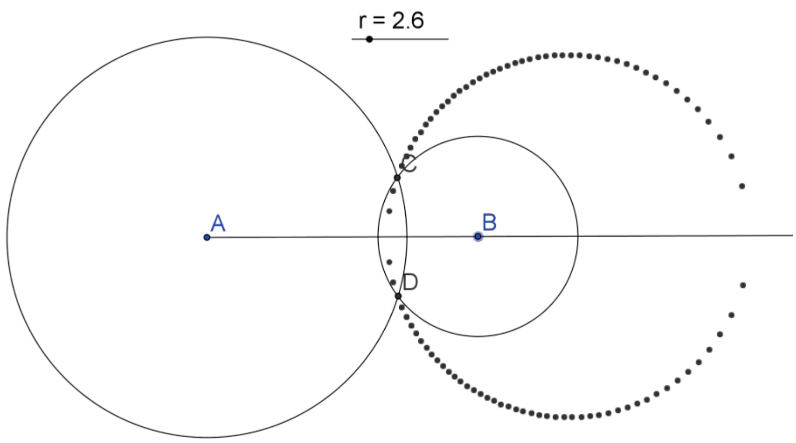


Abb. 2. Appoloniuskreis

Als Ortslinie ergibt sich hier zur Verblüffung der meisten Schüler der sog. Appolonius-kreis.

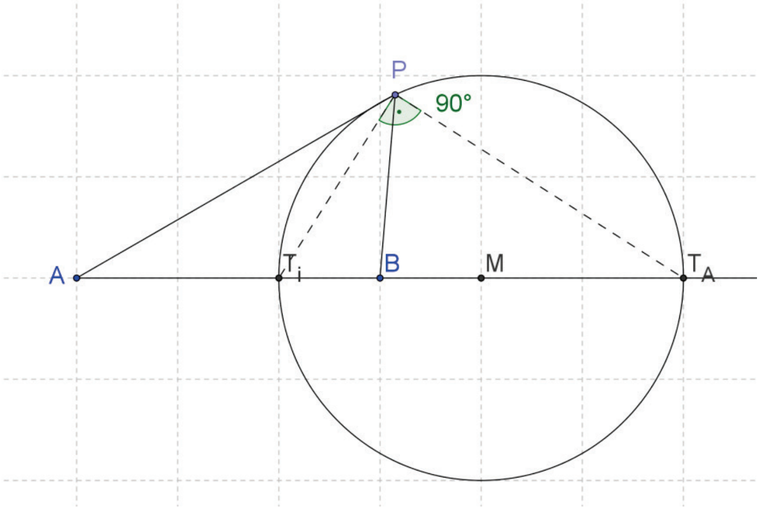


Abb. 3: Appoloniuskreis als Thaleskreis

Die Erklärung dazu ist nicht ganz so einfach. Jede Winkelhalbierende im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. T_i ist der innere Teilungspunkt und T_A der äußere Teilungspunkt von $\overleftrightarrow{AB}$. PT_i ist die Winkelhalbierende des Winkels APB. PT_A ist die Winkelhalbierende des Nebenwinkels. Weil die Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen, liegt P auf dem Thaleskreis über T_iT_A.

2. Charakteristische Punkte im Dreieck

Bei dem folgenden Zugang zu den charakteristischen Punkten im Dreieck sollen die Schüler die Möglichkeit nutzen, das Dreieck im Zugmodus dynamisch zu verändern.

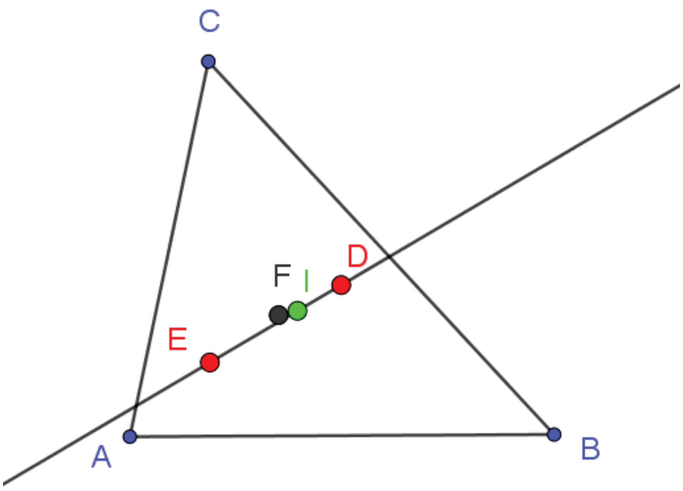


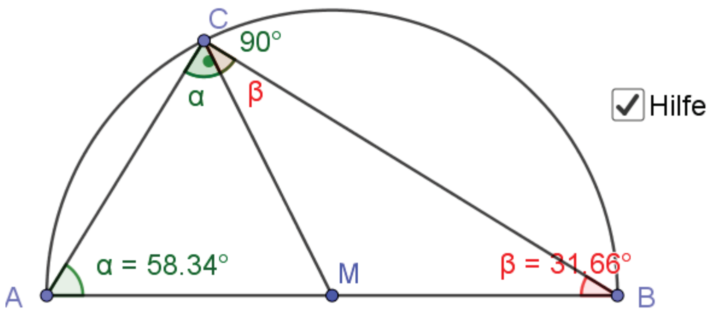
Abb. 4: Charakteristische Punkte im Dreieck

Die (anspruchsvolle) Aufgabenstellung dazu lautet: „Versuche durch Veränderung des Dreiecks herauszubekommen, welcher der 4 Punkte jeweils der Höhenschnittpunkt, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden bzw. der

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist. Du kannst zur Absicherung auch geeignete Kreise einzeichnen.“ Beim Verändern in ein stumpfwinkliges Dreieck wandern die Punkte E und D außerhalb des Dreiecks. Diese müssen demnach der Höhenschnittpunkt bzw. der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten sein. Der Höhenschnittpunkt ist E, weil er beim rechtwinkligen Dreieck auf einem Dreieckspunkt liegt. Zur Absicherung kann man um D auch noch den Umkreisradius einzeichnen. In analoger Weise kann man um F den Inkreis zeichnen und F somit als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden identifizieren. Weitergehende Fragestellungen könnten beispielsweise sein, bei welchem Dreieck alle 4 Punkte zusammenfallen bzw. bei welchen Dreiecken alle 4 Punkte auf einer Geraden liegen.

3. Satz des Thales

Geometrische Beweise spielen (leider) im Mathematikunterricht nur noch eine untergeordnete Rolle. Die Grundidee zum Beweis des Satz des Thales finden die Schüler nach den Erfahrungen des Autors nicht ohne Hilfestellung. Das folgende Geogebraarbeitsblatt unterstützt die Schüler bei der Beweisführung.



1. Um was für spezielle Dreiecke handelt es sich bei den Dreiecken AMC bzw. MBC? Begründung!
2. Wie setzt sich der Winkel γ zusammen? Ggf. “Hilfe” verwenden!
3. Berechne die Winkelsumme im Dreieck ABC! Wie lässt sich daraus der Winkel γ berechnen?

Abb. 5: Satz des Thales

Zunächst erkennen die Schüler durch Veränderung der Lage des Punktes C auf dem Halbkreis, dass die Winkelgröße von γ immer 90° beträgt. Als Lösung der Frage 1 resultiert, dass die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklig sind, weil $|\overleftrightarrow{AM}| = |\overleftrightarrow{MC}| = r$ bzw. $|\overleftrightarrow{BM}| = |\overleftrightarrow{MC}| = r$. Da die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gleich groß sind, folgt, dass sich der Winkel γ darstellen lässt als $\gamma=\alpha+\beta$. Gegebenenfalls können die Winkelbezeichnungen α bzw. β beim Punkt C nach Betätigen des Kontrollkästchens „Hilfe“ eingeblendet werden. Die Anwendung des Winkelsummensatzes ergibt: $2\alpha+2\beta = 180°$ bzw. $\alpha+\beta=\gamma=90°$.

4. Konstruktion der Tangenten an den Kreis

Ein typisches Anwendungsbeispiel für die Verwendung des Satzes des Thales ist die Konstruktion der Tangenten an den Kreis von einem Punkt P außerhalb des Kreises. Das folgende Geogebraarbeitsblatt visualisiert unter Verwendung von 3 Kontrollkästchen die wesentlichen Konstruktionsschritte.

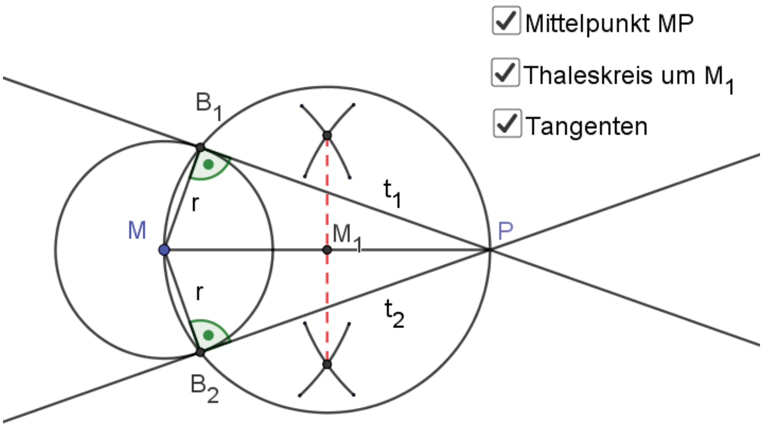


Abb. 6: Konstruktion der Tangenten an den Kreis

5. Spiegelungen

Anhand der folgenden animierten Arbeitsblätter können die wesentlichen Merkmale einer Punkt- bzw. Geradenspiegelung sukzessiv dargestellt werden. Durch Aktivieren der Kontrollkästchen lassen sich die Dreiecksabbildungen schrittweise aufbauen.

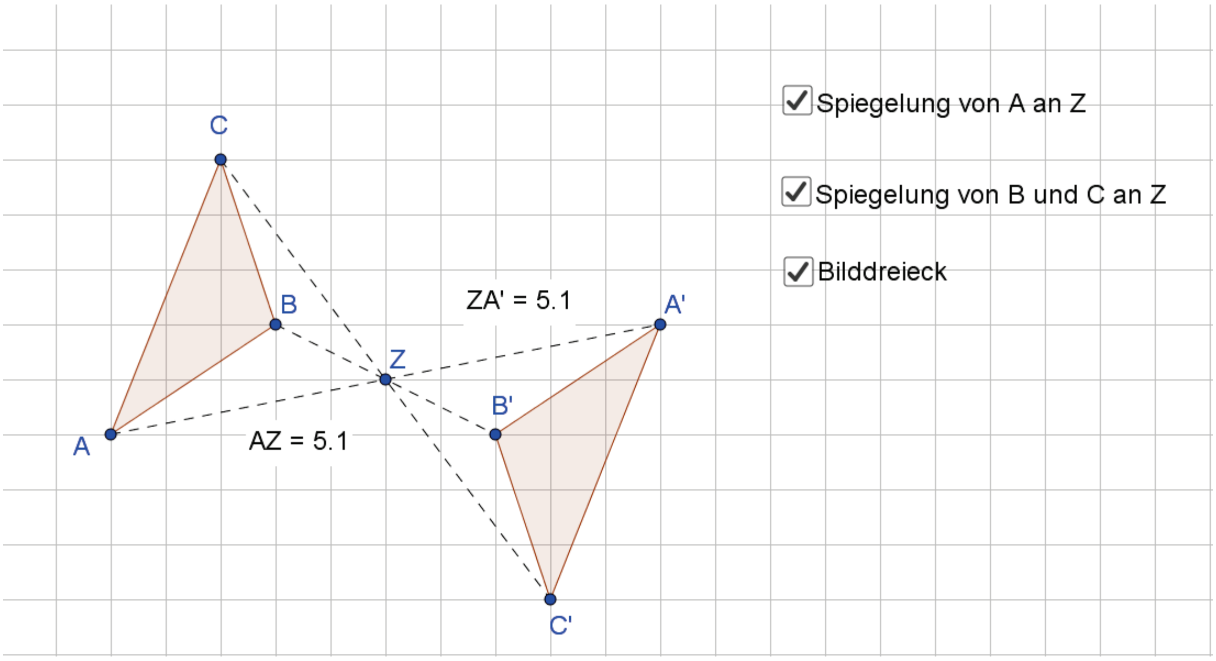


Abb. 7: Animation Punktspiegelung

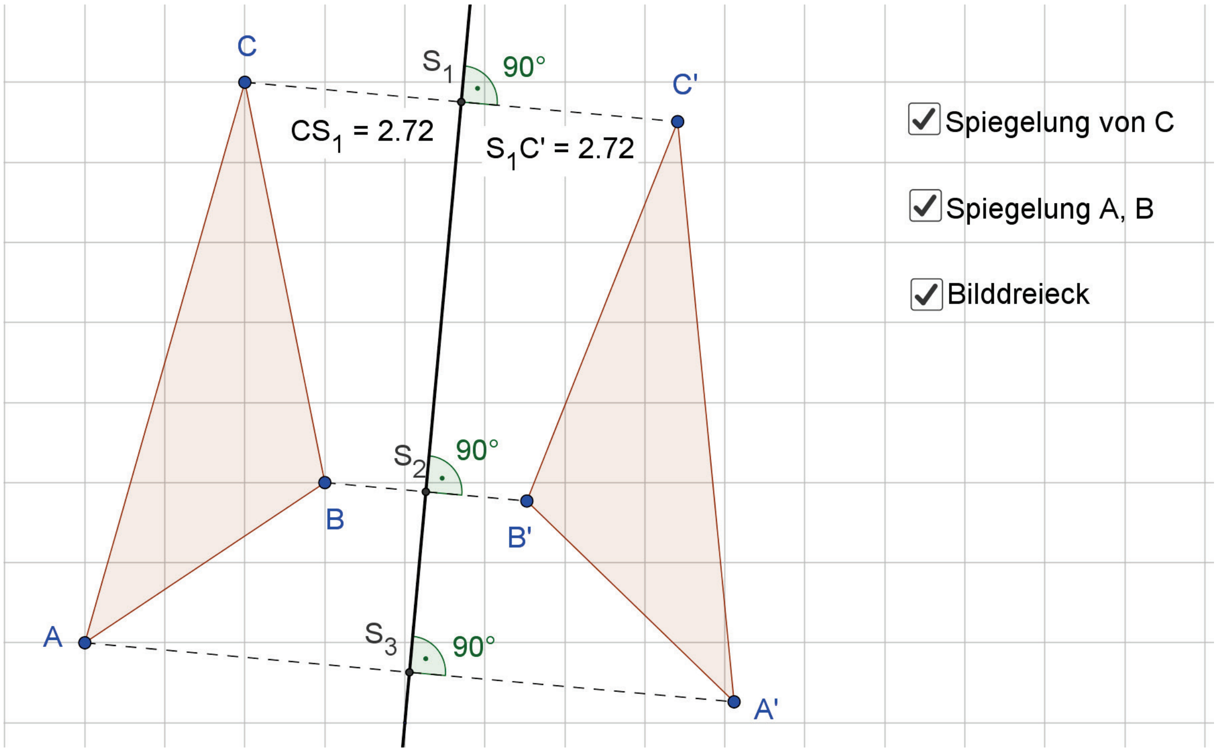


Abb. 8: Animation Geradenspiegelung

5.1. Beschreibung zur Erstellung des Arbeitsblattes „Geradenspiegelung"

Die nachfolgende Beschreibung zur Erstellung des Arbeitsblattes bezieht sich auf die Geogebraversion 5, kann jedoch mit der Version 6 in analoger Weise mit geringfügigen Modifikationen durchgeführt werden. Gehen Sie in der obersten Leiste auf „Einstellungen" → "Objektname anzeigen" und aktivieren Sie „Nur neue Punkte". Gehen Sie dann in der Werkzeugleiste auf das Piktogramm „Vieleck" und zeichnen Sie ein Dreieck ABC (Achtung der Linienzug muss geschlossen werden; Sie müssen also wieder bis A gehen). Zeichnen Sie dann mit dem Geradenwerkzeug neben dem Dreieck eine Spiegelgerade. Gehen Sie dann in der obersten Leiste auf „Einstellungen" →"Objektname anzeigen" und aktivieren Sie „keine neuen Objekte". Gehen Sie jetzt in der Werkzeugleiste auf die 3. Position von rechts und klicken Sie auf „Spiegle an Gerade". Klicken Sie anschließend auf das Dreieck und die Spiegelgerade. Verbinden Sie jetzt die Punkte AA', BB' und CC' und stellen Sie die Strecken unterbrochen dar. Messen Sie die Längen von CZ und C′Z mit dem Längenwerkzeug. Zeichnen Sie die rechten Winkel zwischen den Verbindungsstrecken AA' usw. und der Spiegelgeraden ein, indem Sie das Werkzeug „Winkel" (4. Position von rechts aktivieren; je nach Reihenfolge des Anklickens wird entweder der Winkel 90° oder der Winkel 270° angezeigt). Führen Sie 3 Kontrollkästchen ein, um zunächst den Punkt C abzubilden (Spiegelung von C), danach die Punkte A und B (Spiegelung von A bzw. B) und stellen Sie mit dem letzten Kontrollkästchen das Bilddreieck dar!

6. Netze von Körpern

Von allen Polyedern und Pyramiden lassen sich mithilfe der 2D- und 3D-Graphik von Geogebra die Körper und ihre Netze darstellen. Dabei kann der Entfalt- und Plättvorgang für den Übergang vom Körper zum Netz dynamisch mithilfe eines Schiebereglers dargestellt werden. Besonders spektakulär ist dies im Fall des Dodekaeders. Das dazugehörige Arbeitsblatt ist auf dem Bildungsserver zugänglich. Die folgende Abb. zeigt Körper und Netz für den im Unterricht in der Sek I sicherlich relevanteren Fall des Würfels. Diese Geogebragraphik kann mit überraschend wenigen Befehlen erstellt werden. Durch eine kleine Erweiterung kann die Graphik zur Ermittlung der Formel für das Pyramidenvolumen in einem Spezialfall verwendet werden (vgl. Kapitel 9).

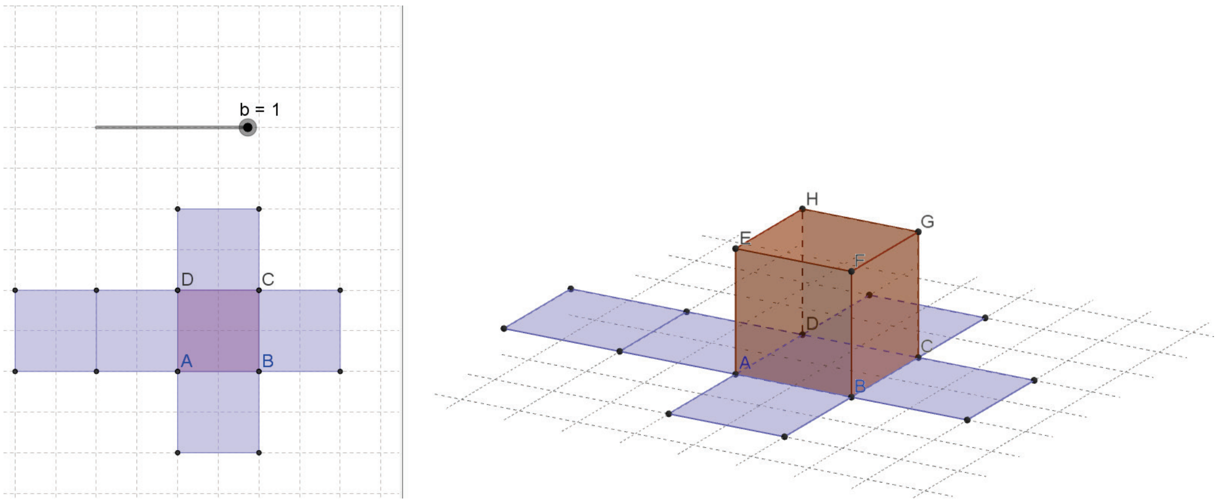


Abb. 9: Würfel und Netz

Auch wenn im Mathematikunterricht der Sek I die zur Verfügung stehende Zeit sehr knapp bemessen ist, sollte man im Fall des Würfels den Schülern Raum für die Bearbeitung folgender Aufgabenstellung geben, die die Kreativität fördert: Zeichne alle Netze des Würfels! Es gibt insgesamt 11 unterschiedliche Netze des Würfels, die man sich auf dem sehr schönen – öffentlich gestellten – Geogebra-Arbeitsblatt von R. Herzog ansehen kann. Mit dem 1. Schieberegler kann man hintereinander alle Würfelnetze einblenden. Anhand des 2. Schiebereglers kann man den Faltvorgang vom Netz zum Würfel demonstrieren. Erfahrungsgemäß zeichnen die Schüler auch fehlerhafte Würfelnetze. Auch dies liefert Anlässe für fruchtbare Diskussionen. Das Arbeitsblatt kann man sich von der Internet-Plattform von Geogebra herunterladen.

Link: https://www.geogebra.org/m/teCkgD2S

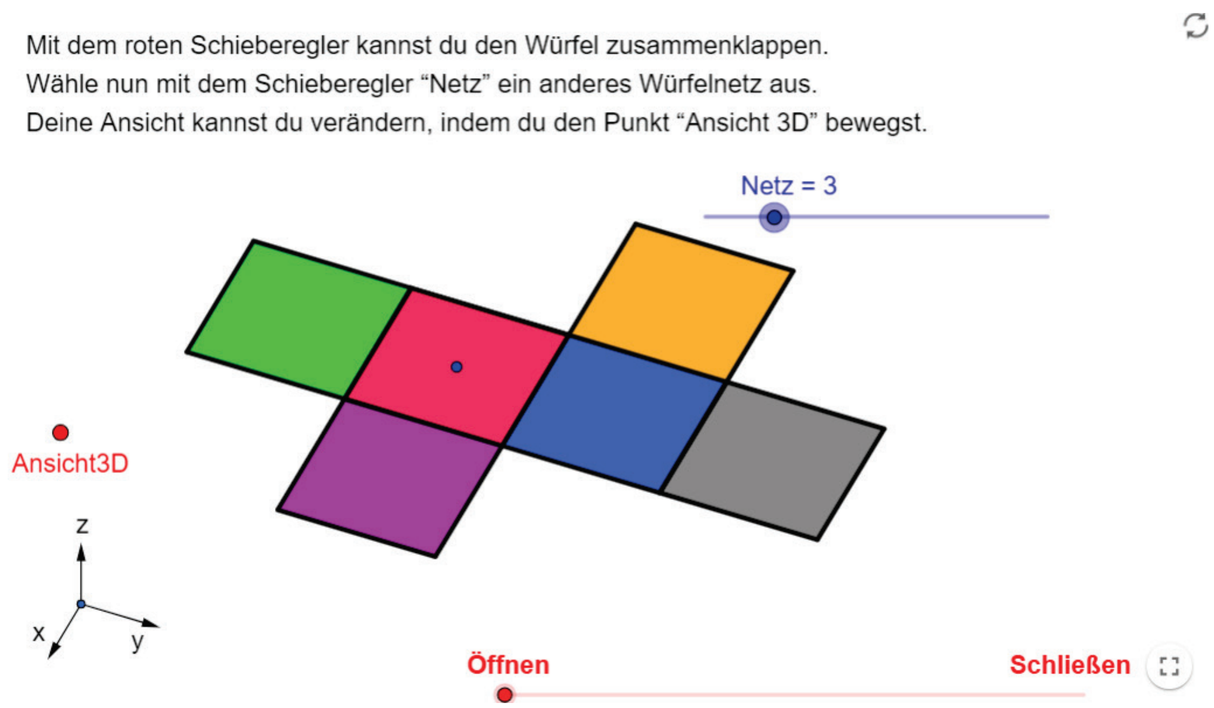


Abb. 10: Alle Netze des Würfels

7. Binomische Formel

Die 1. binomische Formel lässt sich geometrisch sehr schön veranschaulichen, indem man ein Quadrat mit der Seitenlänge a+b in 2 kleinere Quadrate mit den Seitenlängen a bzw. b und 2 Rechtecke mit den Seitenlängen a und b zerlegt. Das folgende Geogebraarbeitsblatt veranschaulicht dies dynamisch, indem durch Bedienung des Schiebereglers k zuerst das Quadrat mit der Seitenlänge a, dann die beiden Rechtecke mit den Seitenlängen a und b und zuletzt das Quadrat mit der Seitenlänge b eingeblendet werden. Die Abbildung 11 zeigt die Ausgangsfigur und die Endfigur nach der Bedienung des Schiebereglers.

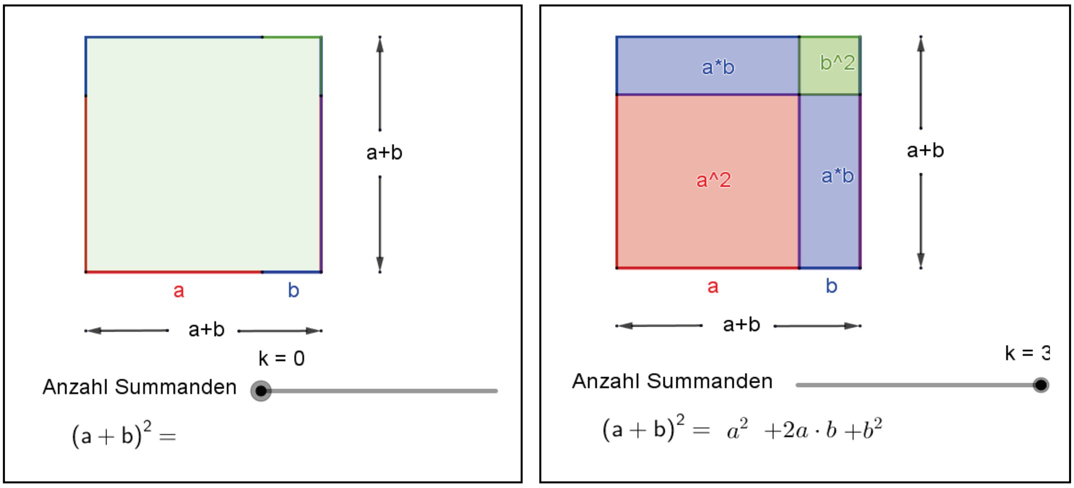


Abb. 11: 1. binomische Formel

8. Der Kreis

8.1. Umfang des Kreises

Zwischen dem Kreisumfang u und dem Kreisdurchmesser d besteht ein einfacher proportionaler Zusammenhang: $u = \pi \cdot d$. Das Faszinierende für die Schüler ist, dass ihnen hier als Proportionalitätsfaktor eine irrationale Zahl begegnet. Als experimentellen Zugang zu der Umfangsformel kann man die Schüler beauftragen, mit einem flexiblen Maßband Durchmesser und Umfang kreisförmiger Objekte (Dosen, Teller, Töpfe, etc.) zu messen. Eine graphische Auftragung der Messwerte inklusive Ausgleichsgerade durch die Punkte führt auf den Zusammenhang $u = k \cdot d$. In der Regel sind die Messwerte so genau, dass man zu der Aussage gelangt, dass der Proportionalitätsfaktor k vermutlich etwas größer als 3 ist. Den Schülern ist klar, dass das Verfahren zur genaueren Bestimmung von k an 2 Stellen verbessert werden muss: I. Die Messwerte für d und u müssen genauer sein, II. die Ausgleichsgerade darf nicht nur gefühlsmäßig durch die Punkte gelegt werden. Damit ist der Boden für den Einsatz der dynamischen Mathematiksoftware Geogebra bereitet. Der Durchmesser d des Kreises in der unten abgebildeten Graphik kann mit Hilfe eines Schiebereglers verändert werden. Der dazugehörige Kreisumfang u wird jeweils gemessen. Die Punkte mit den Koordinatenwerten (d/u) werden im KS abgebildet. Zeichnet man eine Ausgleichsgerade durch lineare Regression, so erhält man mit erstaunlicher Genauigkeit einen Näherungswert für π von 3,14159.

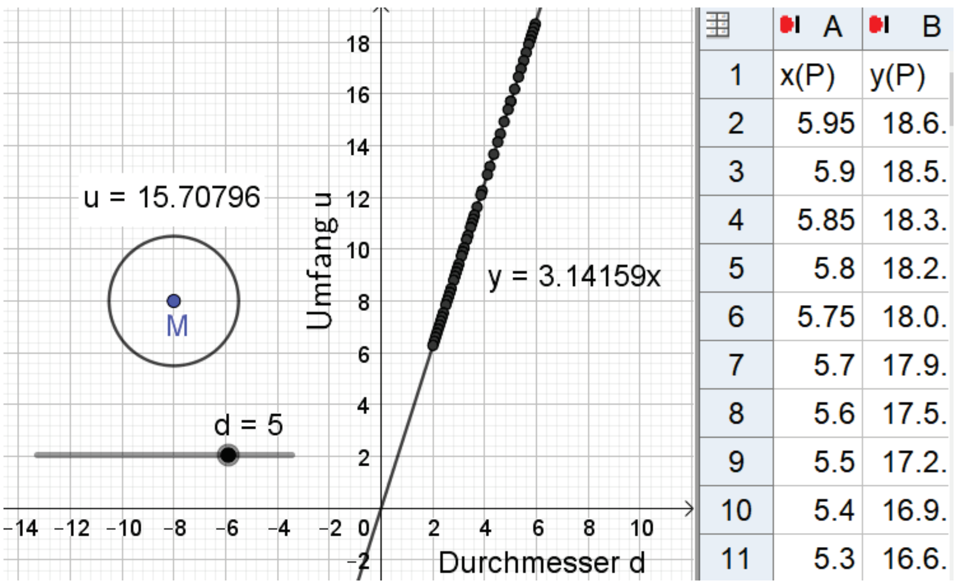


Abb. 12: Umfang des Kreises

8.2. Flächeninhalt des Kreises

Unter Verwendung der Umfangsformel kann man die Flächeninhaltsformel des Kreises herleiten, indem man den Kreis in viele kleine Sektoren zerlegt und diese näherungsweise zu einem Rechteck zusammenlegt. Während Schulbücher das Verfahren nur statisch darstellen können, kann man mithilfe von Geogebra sehr schön zeigen, dass sich die zusammengesetzte Figur mit zunehmender Zahl der Kreisteile immer mehr einem Rechteck annähert, dessen Seitenlängen $\frac{u}{2}$ und r betragen:

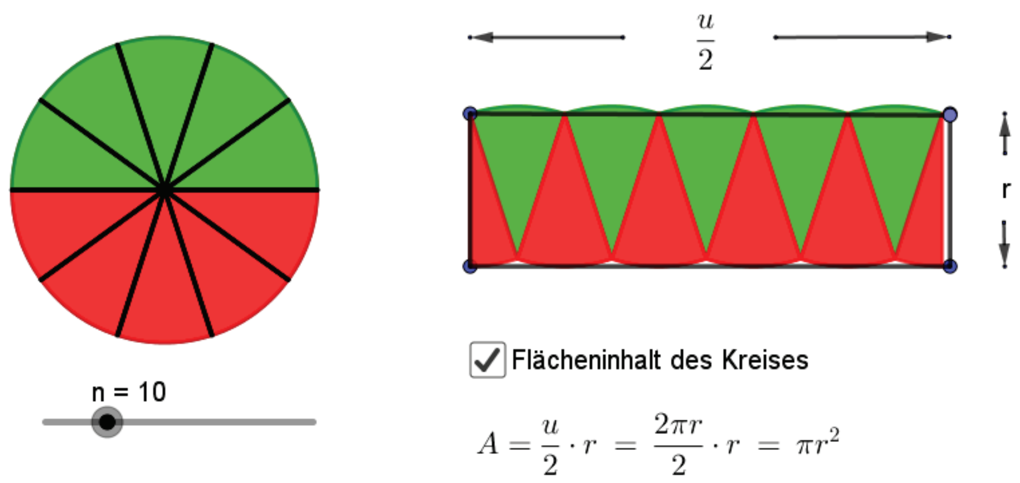


Abb. 13: Herleitung der Flächeninhaltsformel des Kreises

Bei der Erstellung des oben abgebildeten Arbeitsblattes hat sich der Autor an der auf der Geogebrawebseite abgebildeten Graphik von C. Wolfseher orientiert und diese modifiziert.

8.3. Näherungsweise Ermittlung von Pi durch Zufallszahlen

Eine alternative Möglichkeit zur Ermittlung von Pi mithilfe von Zufallszahlen zeigt die folgende Abbildung.

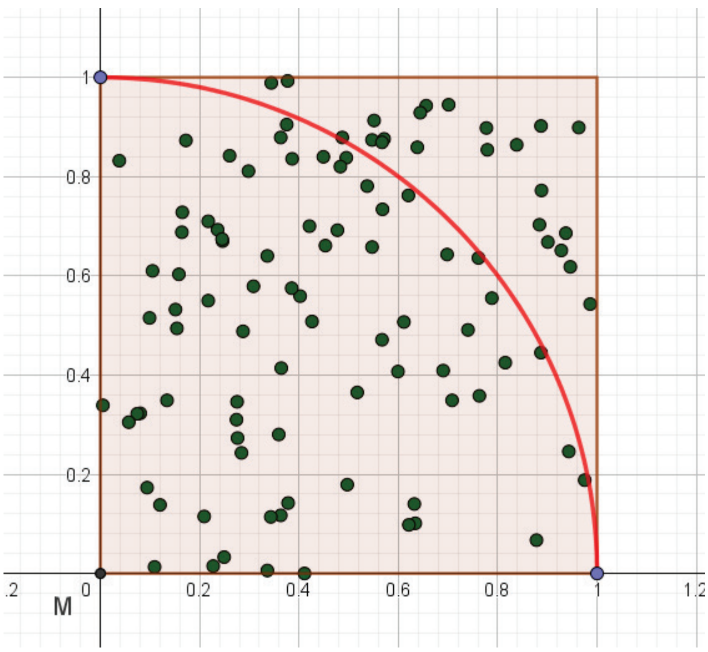


Abb. 14: Näherungsweise Bestimmung von Pi mit Zufallszahlen

Das Bild zeigt einen Einheitsviertelkreis, der in einem Quadrat mit der Kantenlänge 1 liegt. Es werden zufällig Punkte erzeugt, bei denen sowohl die x-Werte als auch die y-

Werte im Intervall [0; 1] liegen. Dann ermittelt man die Entfernung dieser Punkte zum Ursprung. Ist diese Entfernung kleiner oder gleich 1, so liegt der Punkt auf dem Kreisausschnitt des Viertelkreises (sog. Treffer). Setzt man bei einer ausreichenden Zahl von Zufallspunkten die Zahl der Treffer in das richtige Verhältnis zur Gesamtzahl der Punkte, so erhält man einen Näherungswert für Pi (Pi = 4Anzahl der Treffer / Gesamtzahl). Die obige Abbildung zeigt 100 Zufallspunkte. Einigermaßen vernünftige Näherungswerte für Pi in der Umgebung von 3,14 erhält man allerdings erst ab ca. 10000 Punkten!

8.4. Ortslinie eines Punktes auf dem gleitenden Halbkreis

Die folgende Aufgabe demonstriert sehr schön die Möglichkeiten dynamischer Geometriesysteme, ist aber eher für den Wahlpflichtunterricht geeignet.

„Ein Halbkreis „gleitet" mit dem Durchmesser AB = 10 LE so in einem x,y-Koordinatensystem hinunter, dass sich die Endpunkte A und B jeweils auf den Achsen bewegen. Auf dem Halbkreis wird ein beliebiger Punkt P gewählt. Auf welcher Kurve bewegt sich der Punkt P?"

Das Schöne an dieser Aufgabe ist, dass sie kontraintuitiv ist. Fast alle Schüler prognostizieren, dass sich der Punkt vermutlich auf einer gekrümmten Linie bewegen wird. Der Spurmodus bringt hier Aufklärung. Der Punkt P bewegt sich auf einer Ursprungsgeraden!

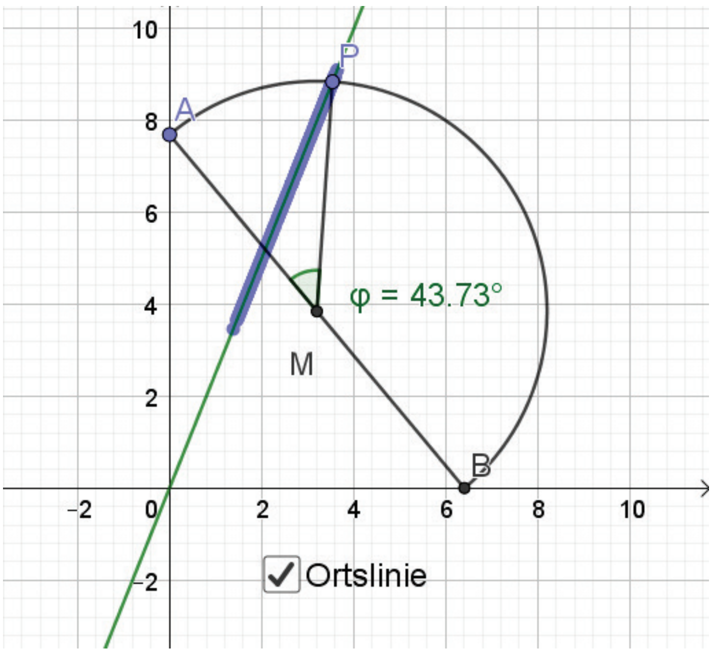


Abb. 15: Ortslinie eines Punktes auf dem gleitenden Halbkreis

Die Erklärung zu diesem Phänomen geht auch etwas über den normalen Mittelstufenstoff hinaus und ist eher für ein Wahlpflichtfach geeignet.

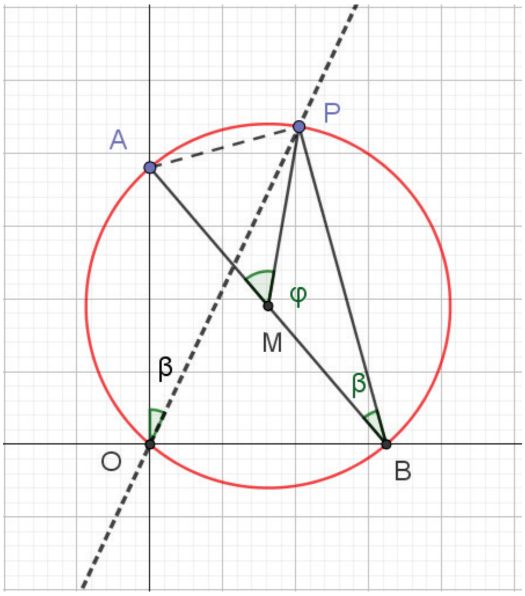


Abb. 16: Erläuternde Skizze zum gleitenden Halbkreis

Die Winkel bei O und B sind Umfangswinkel (sie gehören zur selben Sehne AP) und daher gleich groß. Diese Aussage gilt für jede Position des Durchmessers AB. Der Mittelpunktsswinkel φ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel ($\varphi = 2\beta$). Also lautet die Gleichung der Ortslinie auf der sich der Punkt P bei heruntergleitendem Halbkreis bewegt: $y = \tan(90° - \frac{\varphi}{2}) \cdot x$.

9. Volumen der Pyramide

Die Herleitung der Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide ist mit dem neuen RLP so weit nach vorne gezogen worden, dass eine exakte Herleitung durch Intervallschachtelung mithilfe quadratischer Prismen nicht mehr möglich ist, weil bei den Schülern die mathematischen Grundlagen dafür fehlen und sie damit auch abstraktionsmäßig in ihrer Altersgruppe überfordert wären. Es bietet sich an, die Volumenformel für einen Spezialfall herzuleiten und die so erhaltene Formel zu verallgemeinern. Das folgende Geogebraarbeitsblatt zeigt dynamisch, wie sich ein Würfel der Kantenlänge a aus 6 quadratischen Pyramiden mit der Höhe $\frac{a}{2}$ zusammensetzen lässt.

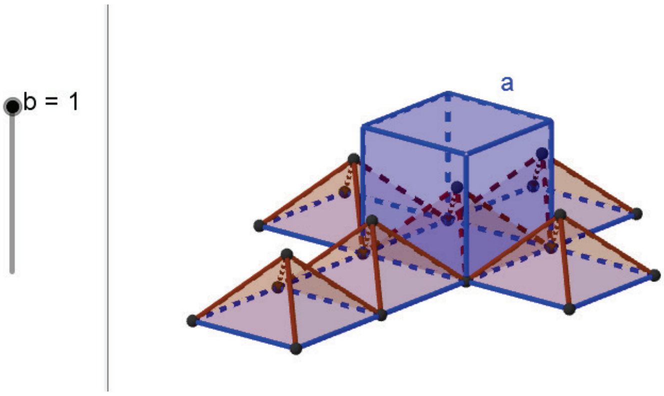


Abb. 17: Zusammensetzung eines Würfels aus quadratischen Pyramiden

Die Schüler erkennen leicht, dass das Volumen einer Pyramide $V = \frac{1}{6} \cdot a^3$ beträgt. Wenn man den rechten Term etwas anders darstellt, lässt sich die Volumenformel leicht herleiten: $V = \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Das Geogebraarbeitsblatt lässt sich übrigens in Anlehnung an das Arbeitsblatt „Netz des Würfels" sehr leicht erstellen.

10. Das Heron-Verfahren

Anhand des Heron-Verfahrens kann man den Schülern ein einfaches Verfahren zur numerischen Ermittlung eines Näherungswertes einer Quadratwurzel durch Iteration vorstellen. Die Methode wurde von HERON VON ALEXANDRIA entdeckt, der etwa Ende des 1. Jahrhunderts in Alexandria lebte. Dabei wird die Berechnung einer Quadratwurzel geometrisch interpretiert. Die Berechnung von $\sqrt{A}$ entspricht der Aufgabe, die Seitenlänge eines Quadrates bei bekanntem Flächeninhalt A zu ermitteln. Es wird eine Folge von Rechtecken betrachtet, die alle den Flächeninhalt A haben und deren Seitenlängen a_n und b_n sich immer mehr annähern, indem man jeweils das arithmetische Mittel der vorhergehenden Seitenlängen berechnet. Die Iterationsvorschrift dazu lautet: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right)$.

Für Iterationsverfahren ist der Einsatz eines Taschenrechners nach Aufstellen eines tabellarischen Rechenablaufplans (Iterationsschritt n – Länge a_n – Breite b_n – Neue Länge $\frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right)$) sinnvoll. Noch effektiver ist natürlich z. B. der Einsatz der Tabellenkalkulation von Geogebra (vgl. Abb. 18a). Das in Abb. 18b gezeigte Geogebraarbeitsblatt visualisiert das Heron-Verfahren. Dabei können die Schüler den Flächeninhalt A und den Startwert für die Länge vorgeben und die einzelnen Iterationsschritte sukzessiv ablaufen lassen.

	A	B	C	D
1	A=	20		
2	a	b	0.5*(a+b)	
3	10	2	6	
4	6	3.3333	4.6667	
5	4.6667	4.2857	4.4762	
6	4.4762	4.4681	4.4721	
7	4.4721	4.4721	4.4721	
8	4.4721	4.4721	4.4721	
9	4.4721	4.4721	4.4721	
10				

Abb. 18a: Iterative Berechnung von $\sqrt{20}$ nach dem Heron-Verfahren (Tabellenkalkulation)

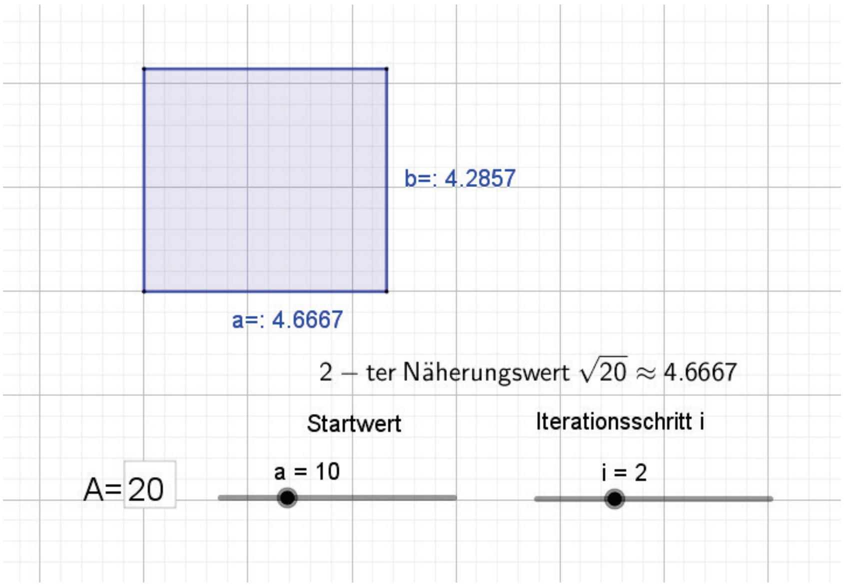


Abb. 18b: Das Heron-Verfahren

11. Der Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist einer der wichtigsten Sätze des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe. Dazu wird hier zunächst ein Geogebraarbeitsblatt vorgestellt, bei dem man das rechtwinklige Dreieck mit γ = 90° an den Eckpunkten B und C im Zugmodus verändern kann. Der formelmäßige Zusammenhang $c^2 = a^2 + b^2$ wird dadurch unmittelbar nahegelegt.

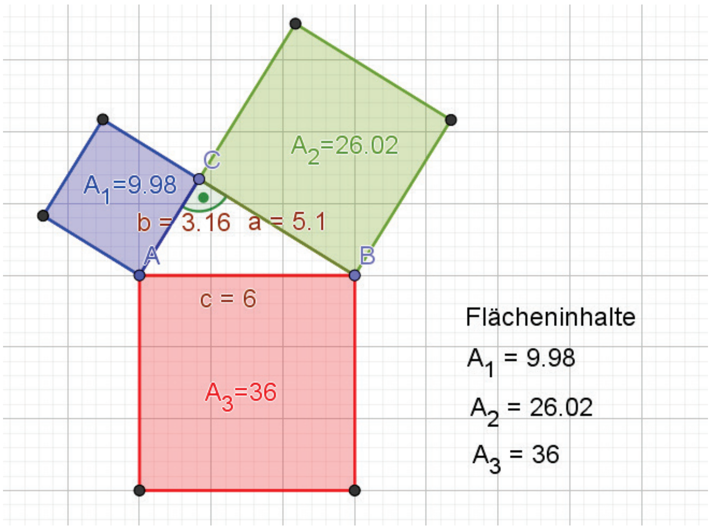


Abb. 19: Der Satz des Pythagoras

11.1. Der Ergänzungsbeweis

Für den Satz des Pythagoras gibt es zahlreiche Beweise. Zu mehreren geometrisch anschaulichen Beweisen findet man auf der Webseite von Geogebra entsprechende Arbeitsblätter. Im Folgenden wird ein dynamisches Geogebraarbeitsblatt für den sog. „Ergänzungsbeweis" vorgestellt, der besonders leicht verständlich und anschaulich ist. Die Abb. 20 zeigt dazu links als Ausgangsfigur ein großes Quadrat mit der Seitenlänge a + b. Das Quadrat enthält 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c sowie ein Hypotenusenquadrat mit der Seitenlänge c und dem Flächeninhalt c^2. Wenn man die Schaltfläche „Starte Animation" anklickt, entsteht durch Verschieben der Dreiecke eine neue Figur mit 2 kleineren Kathetenquadraten mit den Seitenlängen a bzw. b und den Flächeninhalten a^2 bzw. b^2. Die rot gefärbten Flächen in der Ausgangs- und Endfigur müssen gleich groß sein. Daraus folgt: $c^2 = a^2 + b^2$. Durch Anklicken des Buttons „Rücksetzen" erhält man wieder die Ausgangsfigur.

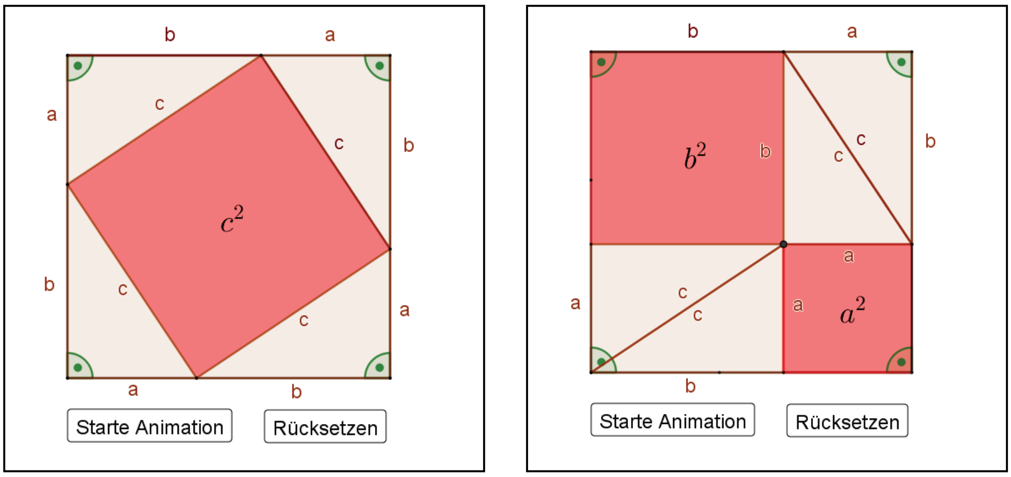


Abb. 20: Ergänzungsbeweis: Links: Ausgangsfigur; rechts: Endfigur

In vielen Schulbüchern findet man – ausgehend von der in Abb. 20 links dargestellten Figur - einen arithmetischen Beweis zum Satz des Pythagoras. Da der Flächeninhalt der vier Dreiecke (siehe Abb.) jeweils $\frac{a \cdot b}{2}$ beträgt, gilt:

$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2$. Solche Berechnungsbeweise tragen aber nach Auffassung des Autors bei den meisten Schülerinnen und Schülern weniger zum Verständnis bei als der oben beschriebene visuelle Ergänzungsbeweis. Da es sinnvoll ist, unterschiedliche „Eingangskanäle" zu nutzen, sollte man auf den rechnerischen Nachweis an dieser Stelle allerdings keinesfalls verzichten.

11.2. Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Auch die Umkehrung des Satzes von Pythagoras lässt sich sehr schön dynamisch anhand eines GeoGebraarbeitsblattes zeigen.

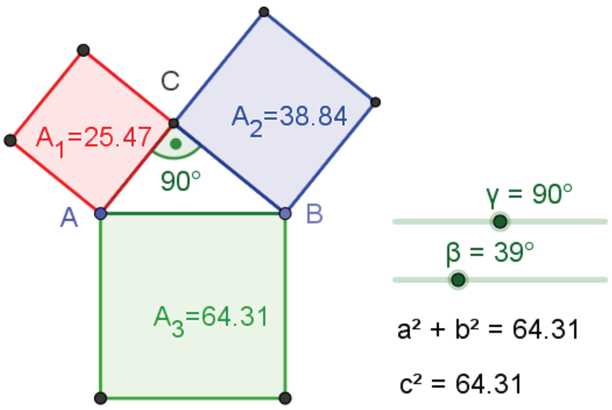


Abb. 21: Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Das Dreieck ABC kann unter Verwendung der Schieberegler und durch „Anfassen" des Punktes B verändert werden. Der Vergleich der Flächeninhalte auf dem Arbeitsblatt in Abhängigkeit von der Größe des Winkels γ legt folgende Aussagen nahe:
Für jedes Dreieck ABC gilt: Wenn $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist $\gamma = 90°$.
Wenn $a^2 + b^2 < c^2$, dann besitzt das Dreieck ABC bei C einen stumpfen Winkel.
Wenn $a^2 + b^2 > c^2$, dann besitzt das Dreieck ABC bei C einen spitzen Winkel.

12. Der Kathetensatz

Für den Beweis des Kathetensatzes ist der Ergänzungsbeweis nicht so eingängig und verständlich wie beim Satz des Pythagoras. Hier empfiehlt sich der klassische Beweis mithilfe von 2 Scherungen, auch wenn den meisten Schülern der Begriff der Scherung nicht mehr bekannt sein dürfte. Die folgende Abbildung zeigt das dynamische Arbeitsblatt nach der 1. Scherung (Scherungsachse BE) und der Drehung des entstandenen Parallelogramms um 90° um den Punkt B im 2. Schritt. Die Begründung dafür, dass Quadrat und Parallelogramm bzw. Parallelogramm und Rechteck flächeninhaltsgleich sind, folgt unmittelbar aus der Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms.

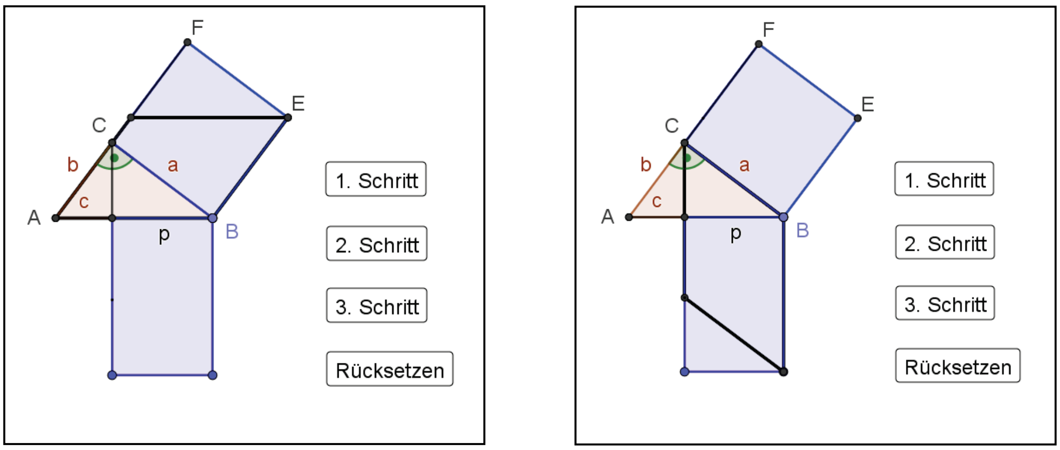


Abb. 22: Beweis des Kathetensatzes. Links: Nach der 1. Scherung; rechts: Nach der Drehung

13. Die Parabel als Ortslinie

Das folgende Geogebraarbeitsblatt liefert einen geometrischen Zugang zur Parabel. Ausgangspunkt ist die folgende Fragestellung: Auf welcher Linie liegen alle Punkte P(x/y), die von einem Punkt F(0/1) [allgemein: F(0/f)] und von der sog. Leitgeraden mit der Gleichung g(x) = - 1 [allgemein: g(x) = -f] gleich weit entfernt sind?

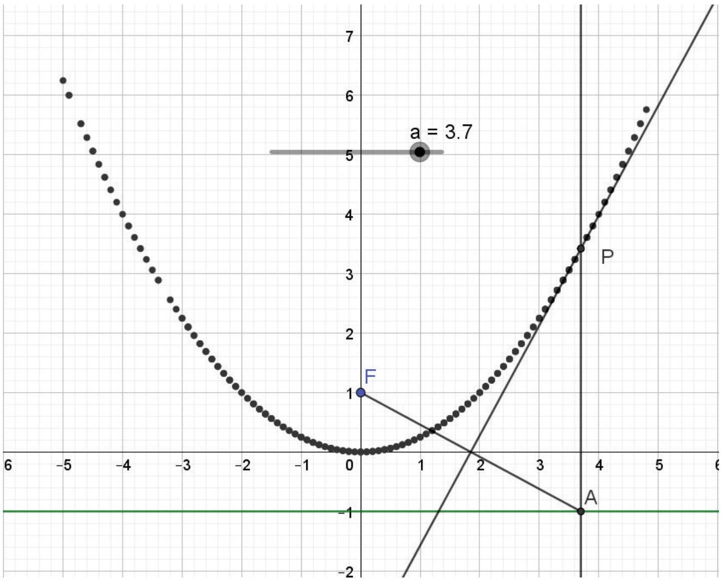


Abb. 23: Die Parabel als Ortslinie

Mithilfe des Schiebereglers wird auf der Leitgeraden ein variabler Punkt P(a/f(a)) erzeugt. Danach sollen die Schüler die Geogebrakonstruktion erklären und die Parabelgleichung z. B. wie folgt herleiten:

Voraussetzung: Der Punkt P(x/y) hat vom Punkt F(0/1) und von der Geraden g(x) = -1 den **gleichen Abstand d.**

(1) $d = y + 1$

(2) $d^2 = x^2 + (y-1)^2$ (Satz des Pythagoras)

(1) in (2): $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$

Umgeformt folgt: $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$

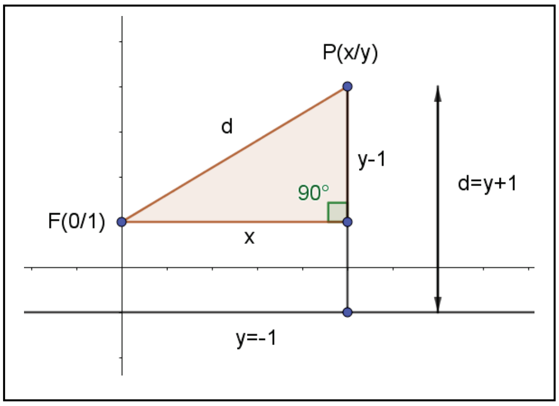


Abb. 24: Skizze zur Herleitung der Parabelgleichung

14. Mandalas und gotische Kirchenfenster

Das Zeichnen von Mandalas ist ein inspirierender und kreativitätsfördernder Anlass um Schüler in spielerischer Form zu motivieren, sich mit den Geometriewerkzeugen von Geogebra vertraut zu machen. Ein Mandala ist ein geometrisches Schaubild, das im Hinduismus und Buddhismus in der Kultpraxis eine magische oder religiöse Bedeutung besitzt. Mandalas sind oft kreisrund und stets auf einen Mittelpunkt orientiert. Die folgenden 4 Abbildungen zeigen Mandalas, die unter Verwendung des Folgebefehls „Folge(<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert>, <Endwert>, <Schrittweite>)“ sowie des Drehebefehls „Drehe(<Objekt>, <Winkel>, <Punkt>)“ erzeugt wurden.

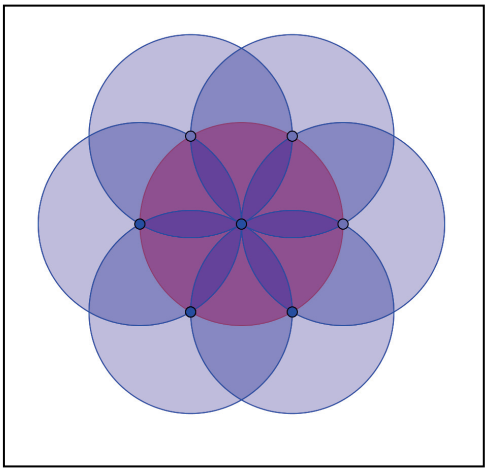


Abb. 25a: Mandala 1

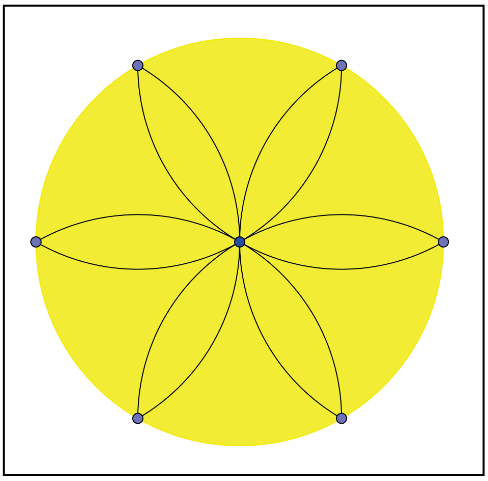


Abb. 25b: Mandala 2

Bezeichnet man in der Abb. 25a den Kreismittelpunkt mit M und den rechten Kreis mit c, so wird der rechte Kreis durch den Befehl „Folge(Drehe(c, α, M), α, 60°, 300°, 60°) fünf Mal um den Mittelpunkt um 60° gedreht. Unter „Eigenschaften“ können die Schüler die Kreisflächen färben und z. B. auch die Deckkraft der Farben variieren.

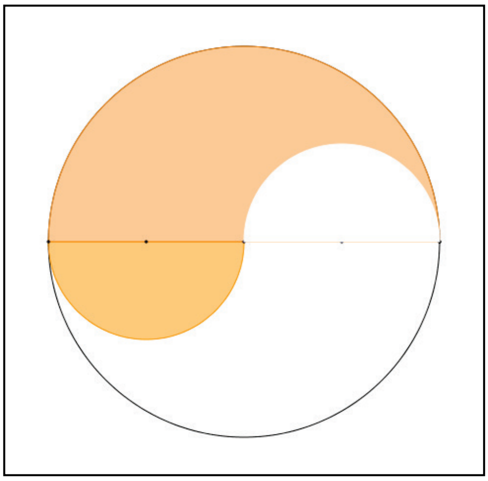


Abb. 25c: Mandala 3

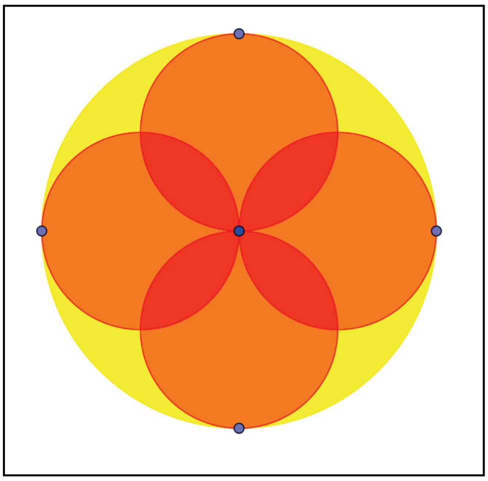


Abb. 25d: Mandala 4

Die Abb. 25c leitet zu einer weiteren Anwendung über, den gotischen Kirchenfenstern. Die Graphik zeigt eine dort auftretende Ornamentform, die sog. Fischblase. Gotische Kirchenfenster setzen sich allgemein aus Kreiselementen zusammen. Die Kreisradien sind über den Satz des Pythagoras zugänglich, interessanterweise oftmals mit irrationalen Zahlenwerten. Zu diesem Themenkomplex lässt sich ein mehrwöchiger Unterrichtsgang konzipieren, der sich z. B. für ein Wahlpflichtfach Mathematik hervorragend eignet. Die folgende Abb. zeigt einen Ausschnitt aus einem gotischen Kirchenfenster mit Dreifachspitzbogen und 3 Berührkreisen. Der obere Kreis enthält zusätzlich einen sog. Dreipass. Bei der Konstruktion können die Schüler u. a. das Werkzeug „Spiegle an Gerade" sowie den Drehe-Befehl (s. o.) und den Folge-Befehl sinnvoll nutzen. Die Erstellung der Abbildung ist allerdings nicht ganz einfach und erfordert Kenntnisse aus dem vorhergehenden Unterricht. Daher wird für die Konstruktion des unten abgebildeten Fensters auch keine Beschreibung zur Erstellung der Geogebrazeichnung angegeben, weil zu viele Zusatzbeziehungen hergeleitet werden müssten. Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche Wege, um ein solches gotisches Kirchenfenster zu zeichnen: I. Auf der Basis von Rechenergebnissen (insbesondere der Kreisradien) oder II. rein zeichnerisch konstruktiv. Beide Vorgehensweisen lassen sich mithilfe von Geogebra realisieren.

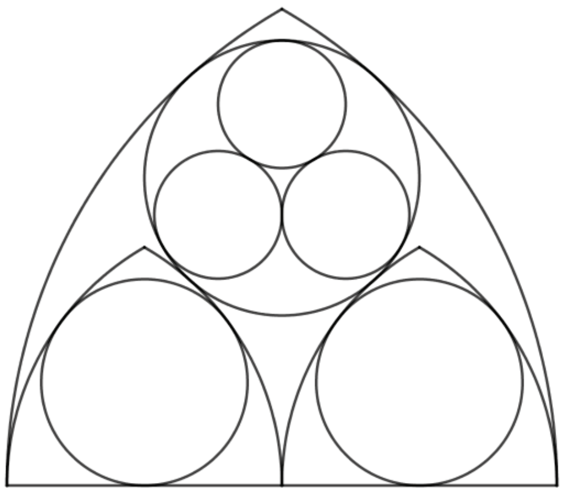


Abb. 26: Ausschnitt aus einem gotischen Kirchenfenster

III. Gleichungen und Funktionen

15. Addition rationaler Zahlen

Das folgende Beispiel gehört eigentlich zur Leitidee „Zahlen und Operationen", wird aber – da es das einzige Beispiel aus dieser Rubrik ist - wegen der Veranschaulichung durch die Zahlengerade und durch Pfeile bei „Gleichungen und Funktionen" eingeordnet. Anhand des unten abgebildeten Geogebraarbeitsblattes können die Schüler überprüfen, ob sie die Addition von positiven und negativen rationalen Zahlen sicher beherrschen. Das Arbeitsblatt kann in der Demonstration für die gesamte Lerngruppe eingesetzt werden aber auch für Einzel- und Partnerarbeit am PC, sofern die räumlichen und technischen Voraussetzungen dafür gegeben sind. Wenn man auf die Schaltfläche „Neue Zahlen" klickt, wird per Zufallszahlengenerator ein neues Rechenbeispiel kreiert. Durch Betätigen des Kontrollkästchens „Ergebnis" können die Schüler die Richtigkeit ihrer Lösung überprüfen. Zusätzlich werden die einzelnen Zahlen durch Pfeile veranschaulicht. Das Arbeitsblatt ist für Kopfrechenübungen konzipiert. Daher werden die Zufallszahlen mithilfe des Befehls „Zufallszahl(-70,70)/10" ermittelt, so dass nur Zahlen mit einer Dezimalstelle resultieren. Wenn man Zahlen mit 2 Dezimalstellen verwenden möchte, müsste man die Eingabe entsprechend in „Zufallszahl(-700,700)/100" abändern.

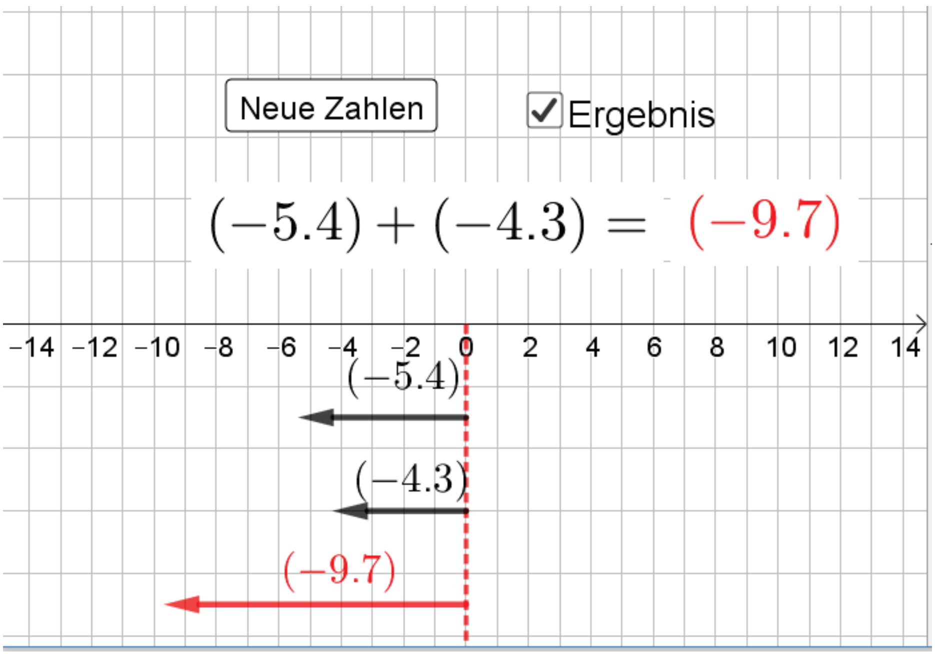


Abb. 27: Addition rationaler Zahlen

16. Einfluss der Parameter bei linearen Funktionen

Anhand des folgenden Arbeitsblattes lassen sich mithilfe der Schieberegler die Steigung m und der Achsenabschnitt n variieren. Der Punkt P auf dem Graphen kann verschoben werden und man erkennt, dass die Steigung m konstant bleibt obwohl sich das Steigungsdreieck sowie die Zahlenwerte von Δx und Δy verändern.

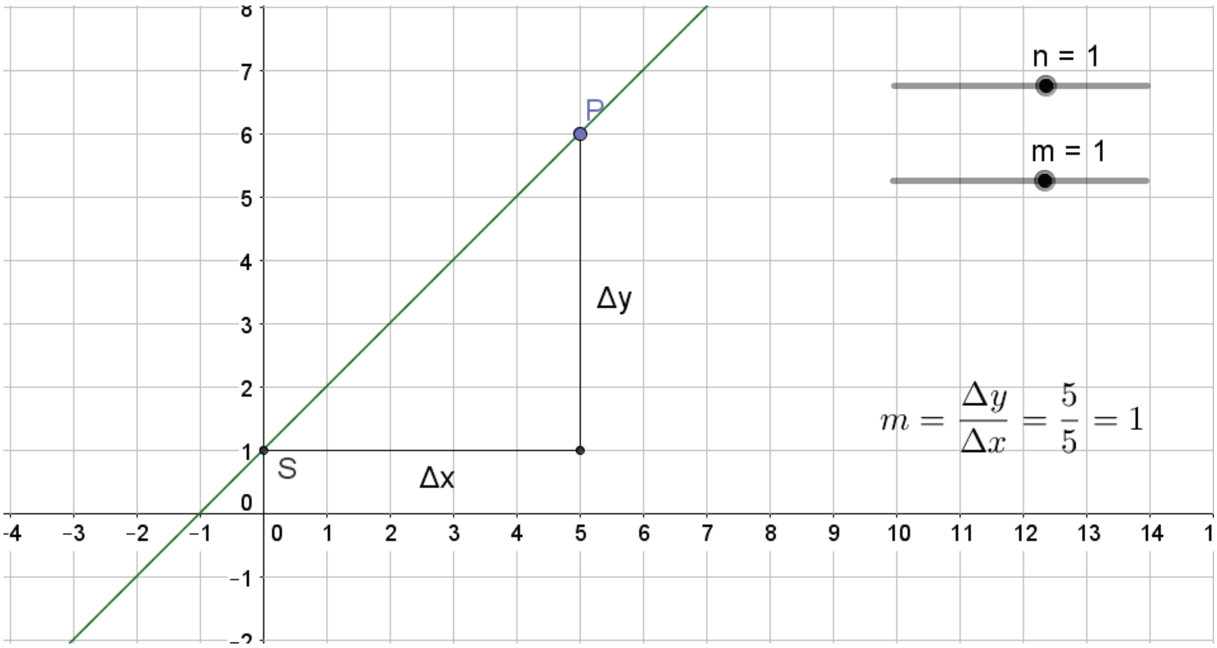


Abb. 28: Einfluss der Parameter bei linearen Funktionen

16.1. Beschreibung zur Erstellung des Arbeitsblattes „Einfluss der Parameter bei linearen Funktionen"

Führen Sie 2 Schieberegler für die Steigung m und den Achsenabschnitt n ein (jeweils: Minimum: -5, Maximum: 5, Schrittweite. 0.05). Geben Sie dann in die Eingabezeile $g(x) = m \cdot x + n$ ein. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse in die Eingabezeile ein: S=(0, n). Platzieren Sie auf der Geraden mithilfe des Werkzeugs „Punkt auf Objekt" einen beliebigen Punkt P. Dazu muss die automatische Bezeichnung von Geogebra umbenannt werden. Zeichnen Sie vom Punkt P ausgehend mithilfe des Werkzeugs „Senkrechte Gerade" jeweils eine Parallele zur x- bzw. y-Achse. Zeichnen Sie mithilfe des „Schneide"-Werkzeugs den Schnittpunkt der beiden Parallelen. Die Parallelen können jetzt wieder „versteckt" werden (Anklicken des blauen Kreises vor der Objektbezeichnung im Algebrafenster). Verbinden Sie die Punkte S und A sowie A und P mithilfe des Werkzeugs „Strecke". Berechnen Sie jetzt die Koordinatendifferenzen durch Eingabe von $\Delta x = x(A)$ und $\Delta y = y(P) - y(A)$. Machen Sie im Algebrafenster einen Rechtsklick auf die Strecke SA. Klicken Sie im sich öffnenden Menue auf „Eigenschaften", machen Sie einen Haken bei „Beschriftung anzeigen", stellen Sie im Menue daneben „Beschriftung" ein und tragen Sie in der 3. Zeile oben „ Δx " ein. Bezeichnen Sie die Strecke AP in analoger Weise mit „ Δy ". Fügen Sie auf dem Arbeitsblatt einen Text als Latexformel ein, der die Steigung m in Abhängigkeit von Δx und Δy angibt. Sie können jetzt den Punkt P auf der Geraden „anfassen" und demonstrieren, dass sich der Wert von m trotz unterschiedlicher Größe des Steigungsdreiecks nicht ändert. Der Einfluss der Parameter m und n lässt sich durch Betätigen der Schieberegler zeigen.

17. Der Geradengenerator

Das folgende Arbeitsblatt, mit dem per Mausklick nach dem Zufallsprinzip eine Gerade der Form $g(x)=\frac{p}{q}\cdot x+n$; mit $p\in\{Z|-5\leq p\leq 5\}$; $q\in\{N|1\leq q\leq 5\}$; $n\in\{Z|-5\leq n\leq 5\}$ erzeugt wird, eignet sich hervorragend zur Übung und Festigung des Zusammenhangs von Geradendarstellung und zugehörigem Funktionsterm.

Durch Betätigen des Kontrollkästchens wird die korrekte Geradengleichung eingeblendet. Wenn man auf die Schaltfläche „Geradengenerator“ klickt, wird eine neue Gerade erzeugt. Zum Erstellen des Arbeitsblattes wird übrigens ein Geogebra-Skript verwendet. Skripte sind eine Abfolge von Befehlen, die nacheinander ausgeführt werden. GeoGebra bietet zwei Skriptsprachen an, um Befehle anzugeben - GGBScript und JavaScript . Die Ausführung eines Skriptes kann durch Klicken auf ein bestimmtes Objekt (hier eine Schaltfläche) ausgelöst werden.

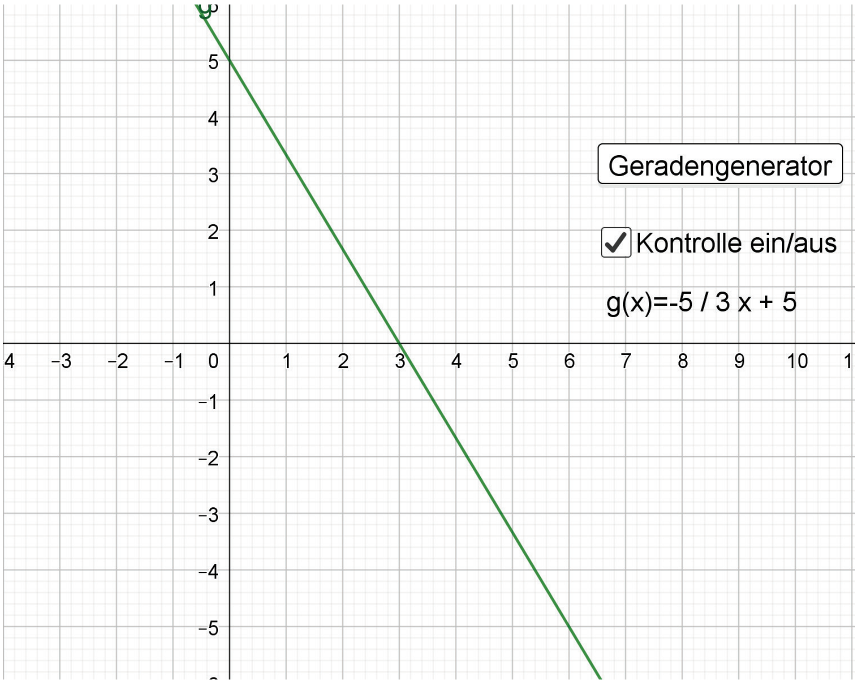


Abb. 29: Der Geradengenerator

18. Lösungsmenge quadratischer Gleichungen

Anhand des Arbeitsblattes kann man die folgende Aufgabe mithilfe eines Schiebereglers veranschaulichen: Für welche Parameterwerte hat die quadratische Gleichung $x^2 + p\cdot x + 4 = 0$ zwei Lösungen (genau eine Lösung, keine Lösung)? In der Abbildung sind jeweils 2 Parabeln gezeichnet, die zu einer zweielementigen bzw. einelementigen Lösungsmenge gehören. Eine Parabel verläuft oberhalb der x-Achse und hat demnach keine Nullstelle. Zusätzlich wird noch im Spurmodus die Ortslinie für die Scheitelpunkte der Parabeln angegeben. Diese Aufgabenstellung dürfte allerdings vom Anspruchsniveau den Rahmen des Unterrichts in der 9. Klasse überschreiten.

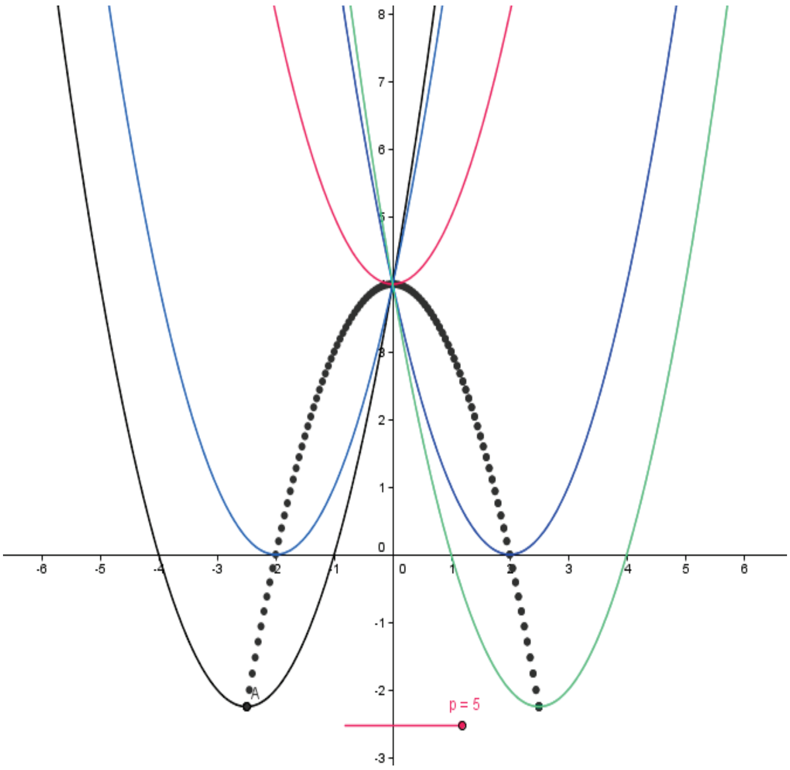


Abb. 30: Lösungsmenge quadratischer Gleichungen

19. Der Parabelgenerator

Anhand des folgenden Arbeitsblattes kann per Mausklick nach dem Zufallsprinzip eine Parabel der Form $p(x) = (x - d)^2 + e$ mit d, e $\in \{Z \mid -4 \leq d, e \leq 4\}$ erzeugt werden. Die Schüler sollen den Funktionsterm ablesen und in der Form $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$ darstellen.

Durch Betätigen der beiden Kontrollkästchen kann die Richtigkeit der Lösung sowohl in der Form $p(x) = (x - d)^2 + e$ als auch in der Form $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$ überprüft werden.

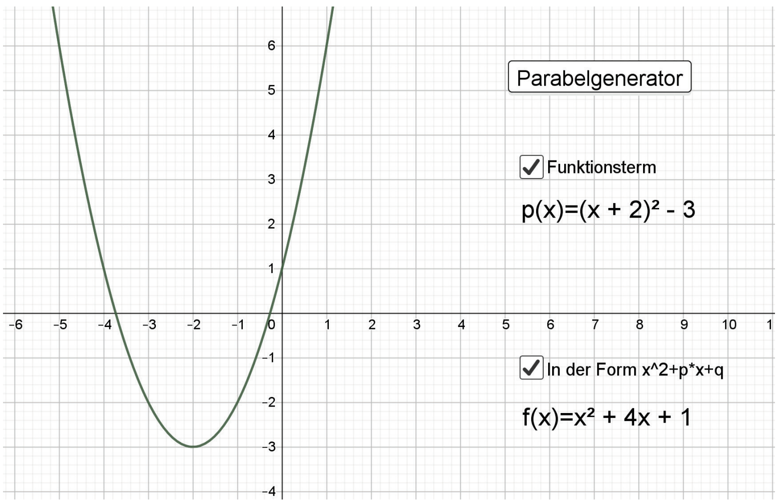


Abb. 31: Der Parabelgenerator

Eine sogenannte Geogebra-Lernumgebung zum Thema „quadratische Funktionen“, wobei sich die Schüler relativ selbstständig anhand verlinkter Arbeitsblätter das Strecken, Stauchen und Verschieben der Normalparabel erarbeiten können, wird am Ende dieser Handreichung detailliert beschrieben.

20. Konstruktion des Graphen der Sinusfunktion

Der Graph der Sinusfunktion kann gezeichnet werden, indem man schrittweise die y-Koordinate eines Punktes P auf dem Einheitskreis direkt in ein Koordinatensystem überträgt. In analoger Weise kann man auch die Kosinusfunktion erzeugen. Allerdings müssen die x-Werte der Punkte auf dem Einheitskreis zunächst auf die Hochachse übertragen werden. Diese Vorgänge können dynamisch unter Verwendung des Spurmodus mithilfe von Geogebra dargestellt werden.

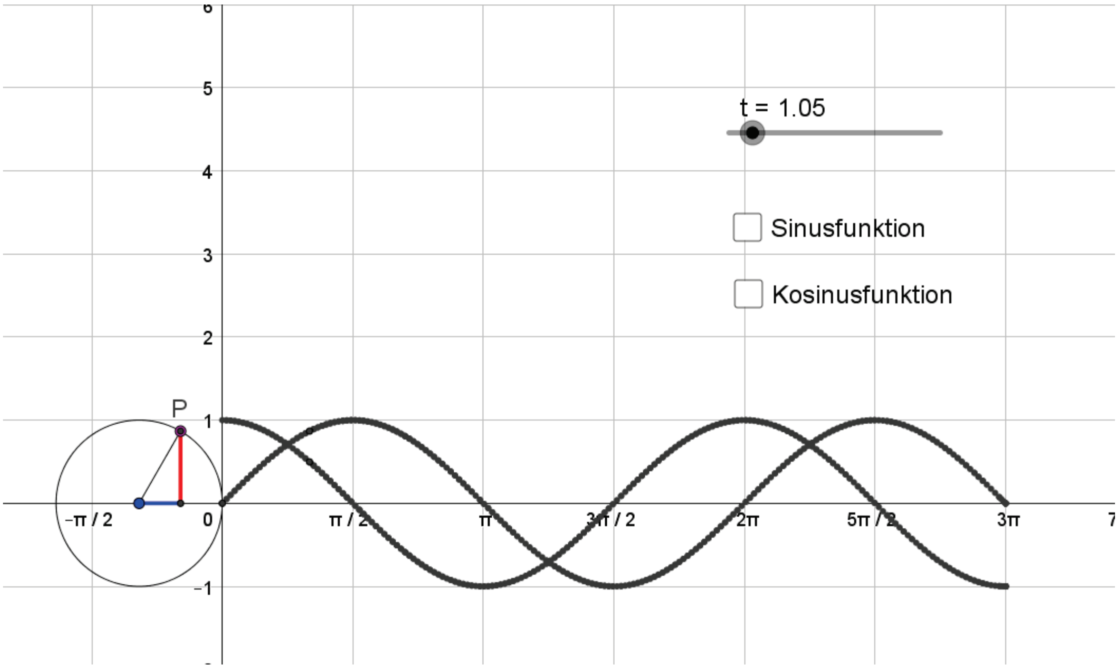


Abb. 32: Graph der Sinus- und Kosinusfunktion

21. Modellierung Federpendel

Ein Federpendel befinde sich zu Beobachtungsbeginn in der oberen Maximalauslenkung (bei + 4 LE). Nach 2 s ist es einmal „durchgeschwungen“, d. h. es hat wieder den Ausgangspunkt erreicht.

Der Vorgang kann mithilfe von Geogebra dynamisch dargestellt werden. Zunächst müssen sich die Schüler überlegen, dass man den Vorgang mithilfe der

Kosinusfunktion $h(t) = 4 \cdot \cos(\pi \cdot t)$ oder der Sinusfunktion $f(t) = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)$ beschreiben kann. Das folgende Arbeitsblatt zeigt die Animation, die man automatisch ablaufen lassen kann, indem man die Schaltfläche anklickt.

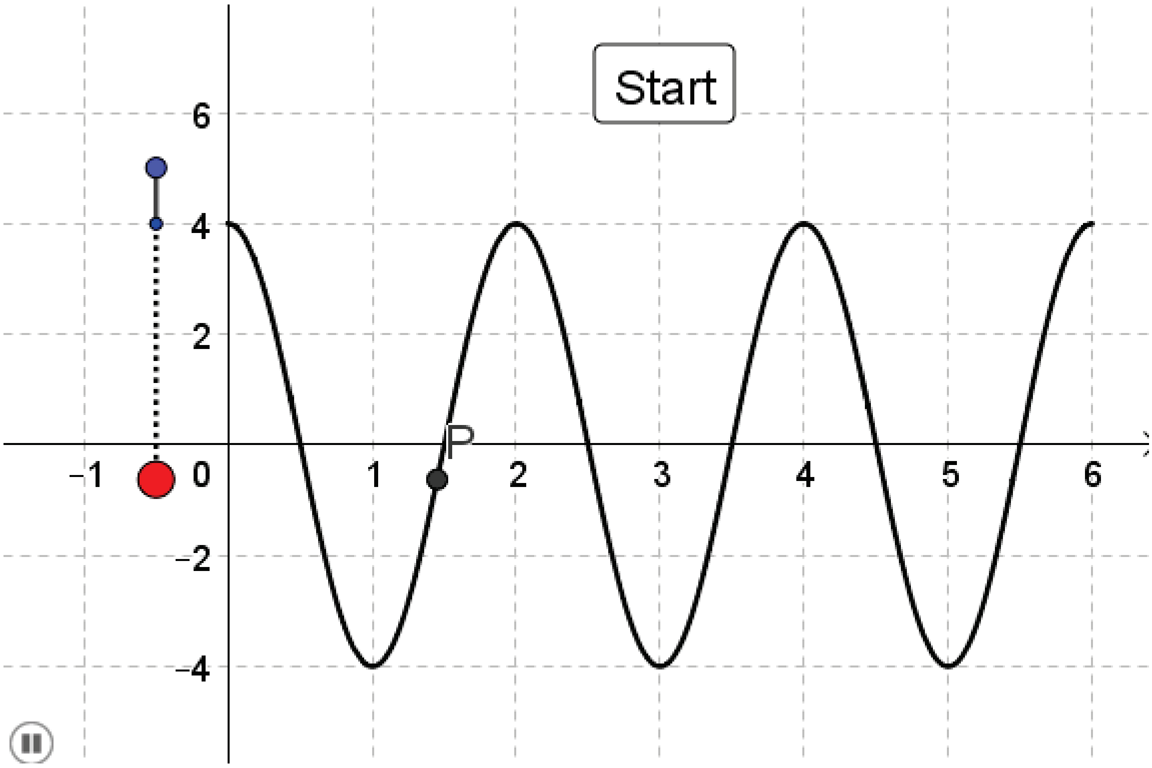


Abb. 33: Animation Federpendel

22. Modellierung Fadenpendel

Ausgangspunkt dazu sei folgende Aufgabe:
Ein Fadenpendel wird aus der Ruhelage um 3 dm ausgelenkt und losgelassen. Nach 4 s kommt die Kugel wieder in der Startposition an. (vgl. Skizze).

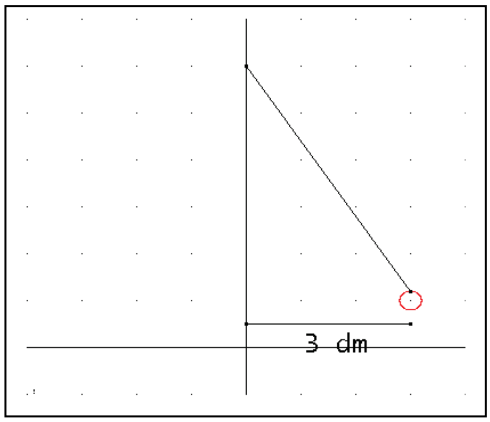


Abb. 34: Skizze zur Aufgabe „Fadenpendel"

Zunächst müssen die Schüler herleiten, dass man den Vorgang mithilfe der Kosinusfunktion $h(t) = 3 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot t)$ oder der Sinusfunktion $f(t) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (t+1))$ beschreiben kann. Da das Fadenpendel auf einem Kreisbogen schwingt, muss den Schülern die Formel für die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(x_M/y_M)$ bekannt sein: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ bzw. $y = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} + y_M$. Die folgende Abbildung zeigt die Animation für die Schwingung des Fadenpendels.

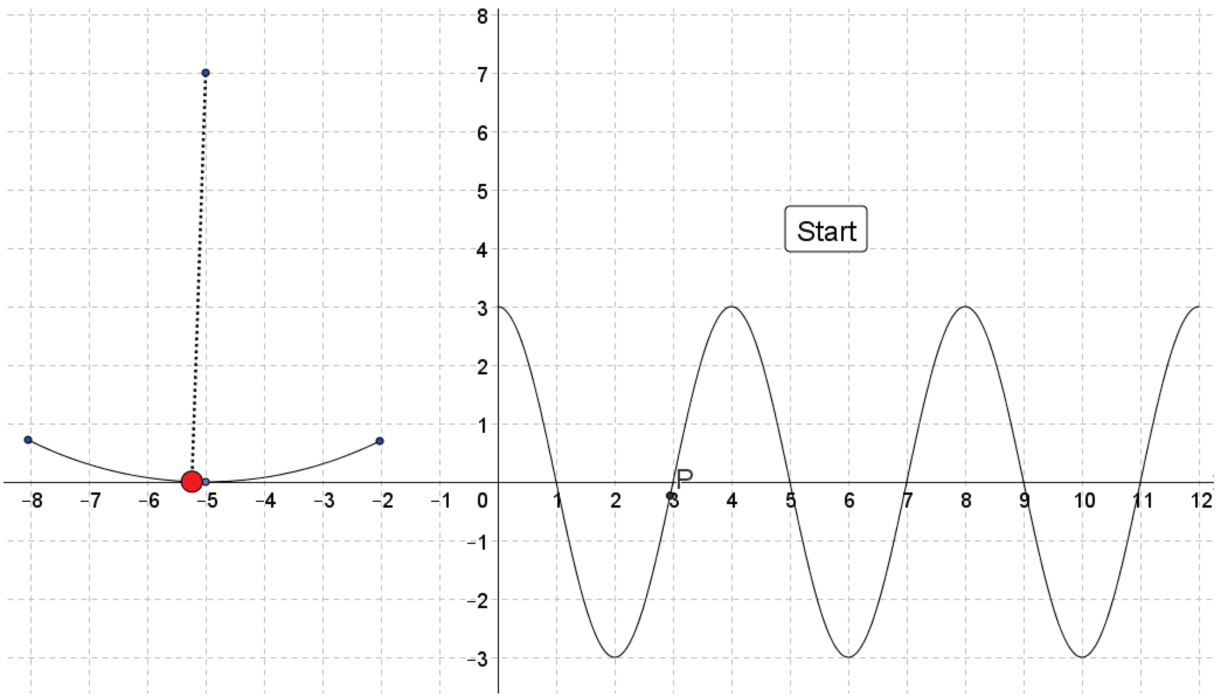


Abb. 35: Animation Fadenpendel

Die beiden Geogebraarbeitsblätter zu den Schwingungsanimationen können die Schüler übrigens nach den Erfahrungen des Autors relativ selbstständig erstellen, wenn man ihnen einige Hilfestellungen dazu gibt.

Eine sogenannte Geogebra-Lernumgebung zum Thema „Sinusfunktionen mit Parametern", wobei sich die Schüler relativ selbstständig anhand verlinkter Arbeitsblätter das Strecken, Stauchen und Verschieben der Sinusfunktion erarbeiten können, wird am Ende dieser Handreichung detailliert beschrieben.

23. Die allgemeine quadratische Funktion

Der neue RLP sieht die Behandlung der allgemeinen quadratischen Funktion sowie das Lösen von 3 x 3 LGS vor. In diesem Zusammenhang ergeben sich Fragen nach den Funktionsgleichungen von Parabeln, die durch 3 Punkte verlaufen. Beispiel: Welche allgemeine quadratische Punktion verläuft durch die Punkte A(-2/1), B(1/-2) und C(4/2)? Die Aufgabe kann man mithilfe von Geogebra auf verschiedene Weise lösen. I. Man zeichnet die 3 Punkte im Graphikfenster ein und gibt danach folgenden Befehl in die Eingabezeile ein: „TrendPoly(A,B,C,2)". Die „2" am Ende bedeutet, dass ein Polynom 2. Grades berechnet werden soll. Das Ergebnis wird im Algebrafenster angezeigt: $f(x)=\frac{7}{18}x^2-\frac{11}{18}x-\frac{16}{9}$. II. Es bietet sich an, die Schüler an dieser Stelle auch mit der Bedienung des CAS vertraut zu machen, damit sie ihre Rechenergebnisse kontrollieren können. In diesem Fall müssten sie im CAS-Fenster zunächst die allgemeine quadratische Funktion definieren: $p(x):=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Das LGS wird dann durch Eingabe von „Löse({p(-2)=1, p(1)=-2, p(4)=2},{a,b,c})" gelöst. Das Ergebnis wird in einer Liste angegeben: $\left\{a=\frac{7}{18}, b=-\frac{11}{18}, c=-\frac{16}{9}\right\}$. Die folgende Abbildung zeigt die Graphik zur Aufgabe.

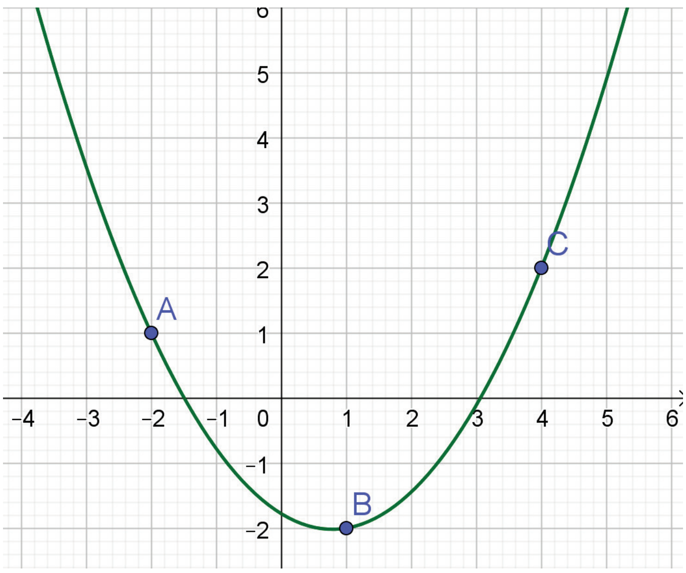


Abb. 36: Parabel durch 3 Punkte

Das hier beschriebene Verfahren eignet sich auch zum Modellieren auf Hintergrundbildern (z. B. von Brückenbogen).

24. Der Graph der Ableitungsfunktion

In Anlehnung an das händische Verfahren zum Skizzieren der Ableitungsfunktion zu einer gegebenen Funktion f kann man mithilfe von Geogebra den Graphen der Ableitungsfunktion unter Verwendung eines Schiebereglers (Geogebrabezeichnung z. B. a) dynamisch erzeugen. Man misst zu einem beweglichen Punkt P(a/f(a)) jeweils die Tangentensteigung m und zeichnet den entsprechenden Punkt Q(a/m) auf der Ableitungskurve. Durch Bedienen des Schiebereglers lässt sich eine Reihe von Punktkoordinaten der Ableitungsfunktion in eine Tabelle übertragen. Die entsprechenden Punkte können gezeichnet werden und die Ableitungsfunktion kann durch Zeichnen einer Regressionskurve ermittelt werden. Im Fall einer Regressionsgeraden steht das entsprechende Werkzeug oben in der Leiste direkt zur Verfügung. Ansonsten enthält Geogebra eine Reihe von Befehlen; z. B. den Befehl „TrendPoly(<Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms>)“, der ein Regressionspolynom n-ten Grades berechnet. Die folgende Abbildung zeigt das Verfahren für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$.

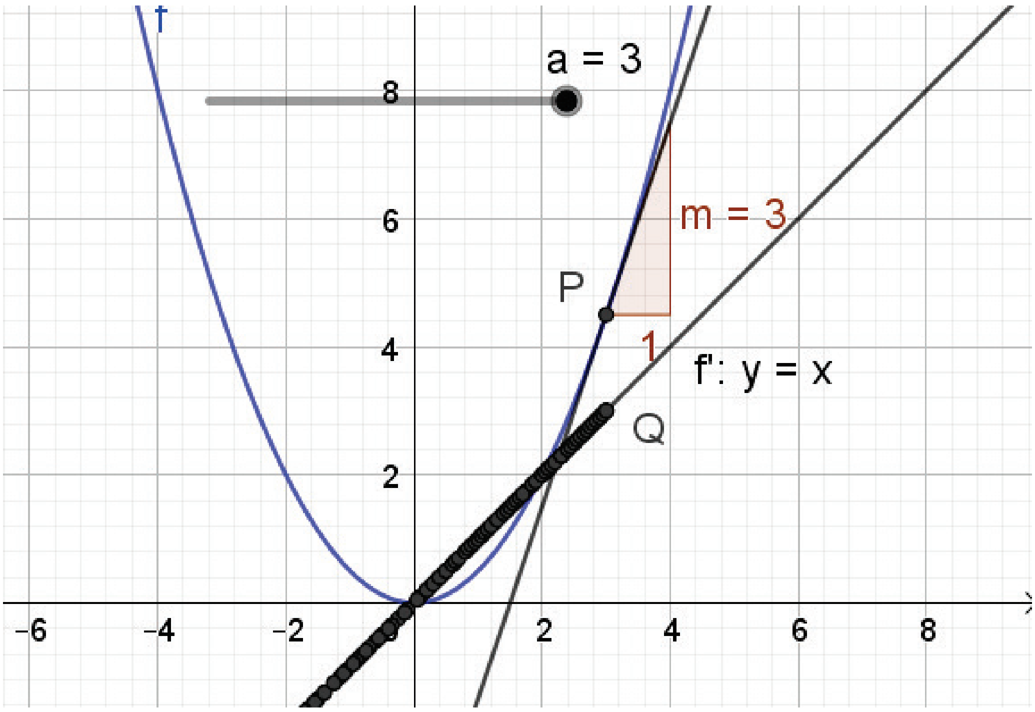


Abb. 37: Der Graph der Ableitungsfunktion

IV. Daten und Zufall

25. Verarbeitung und grafische Darstellung von Daten

Die Verarbeitungsmöglichkeiten von Daten und die Möglichkeiten der grafischen Darstellung mithilfe von Geogebra werden am Beispiel der nachstehenden Aufgabe erläutert:

In zwei siebenten Klassen haben die Schülerinnen und Schüler die Dauer ihrer Schulwege (in min) angegeben. Die Schulwegezeiten der beiden Gruppen sollen anhand von Kennzahlen sowie unterschiedlicher grafischer Darstellungen miteinander verglichen werden.

Klasse 7a: 10, 6, 1, 3, 7, 2, 14, 7, 1, 1, 21, 17, 12, 2, 2, 18, 19, 15, 6, 21, 21, 1, 17, 2, 12 , 5, 25

Klasse 7b: 25, 18, 18, 9, 6, 18, 18, 23, 13, 7, 1, 25, 3, 5, 6, 12, 11, 15, 2, 25, 9, 1, 21, 2, 6, 25, 10, 18, 1, 1, 20

25.1. Boxplots

Man öffnet die Tabellenansicht und trägt die Daten in die ersten beiden Spalten A bzw. B ein. Man markiert die beiden Spalten mit der linken Maustaste und aktiviert das Werkzeug „Analyse mehrerer Variablen". Danach klickt man auf den Button „Analyse". Die beiden zugehörigen Boxplots werden angezeigt. Wenn man zusätzlich auf den Button „Statistik anzeigen" klickt, werden u. a. die 5 charakteristischen Werte (Min, Q1, Median, Q3, Max) tabellarisch angezeigt.

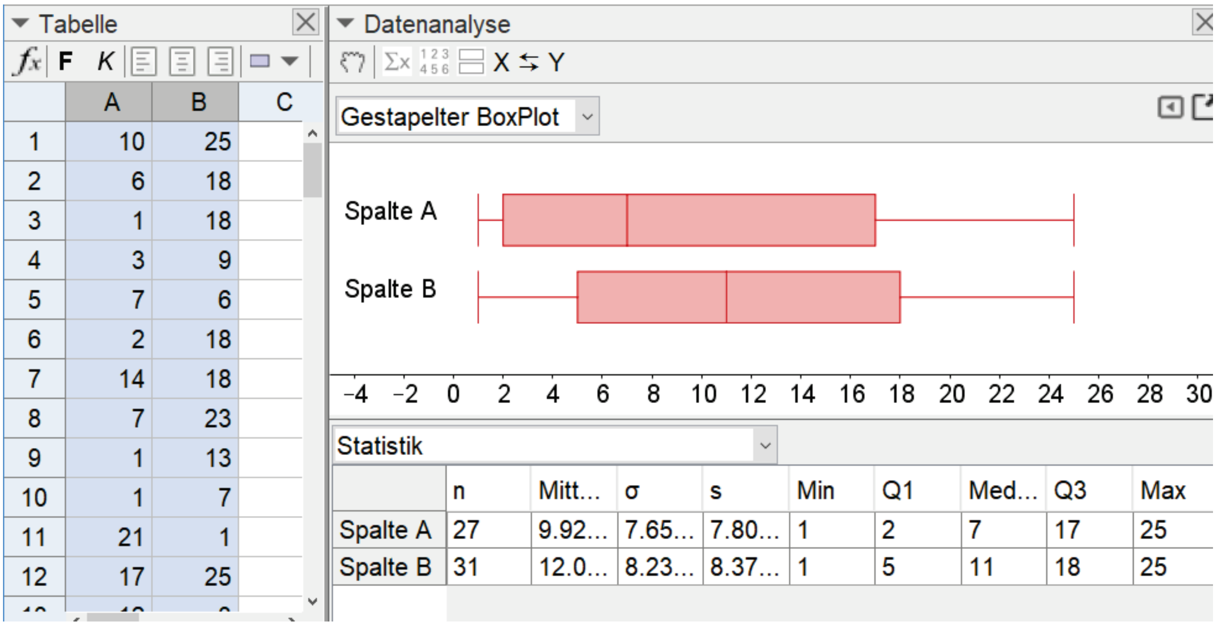


Abb. 38: Gestapelter Boxplot

Die Daten in der Tabelle lassen sich auch übersichtlicher nach Größe sortiert darstellen. Dazu markiert man beispielsweise die 1. Spalte und erzeugt mit einem Rechtsklick „Erzeugen"→"Liste" eine Liste l1 im Algebrafenster. Durch Eingabe von „Sortiere(l1)" werden die Daten der Größe nach sortiert und in einer 2. Liste l2 dargestellt. Durch Eingabe von z. B. FülleSpalte(3, l2) werden die sortierten Daten in die 3. Spalte der Tabelle übertragen.

Man kann auch einzelne Boxplots erzeugen. Um beispielsweise die Schulwegzeiten der Klasse 7a darzustellen, markiert man die 1. Spalte und klickt auf den Button „Analyse einer Variablen“ und danach auf „Analyse“ und ggf. auf „Statistik anzeigen“.

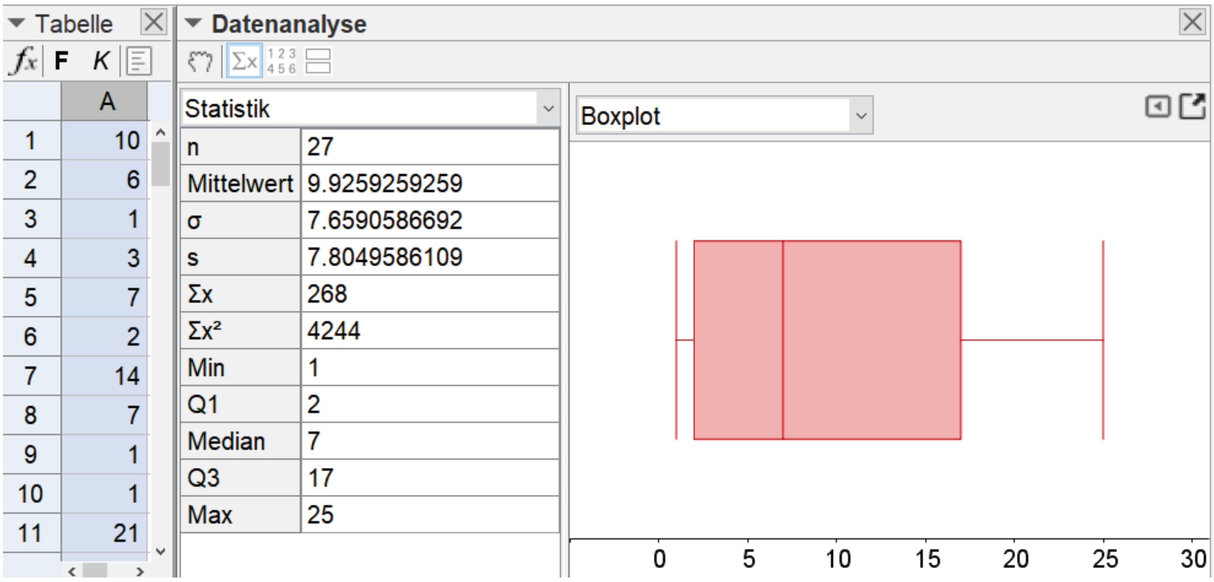


Abb. 39: Einzelboxplot

25.2. Säulendiagramme

Die Schulwegezeiten können natürlich auch mithilfe von Säulendiagrammen ggf. in Klasseneinteilung dargestellt werden. Die Abb. 40 zeigt ein einfaches Säulendiagramm (die Geogebra-Bezeichnung lautet Balkendiagramm) während die Abb. 41 ein Säulendiagramm mit einer Einteilung in 8 Klassen (1 min ≤ Schulwegzeit < 4 min, usw.) zeigt. Die Geogebra-Bezeichnung für das Säulendiagramm mit Klasseneinteilung lautet Histogramm.

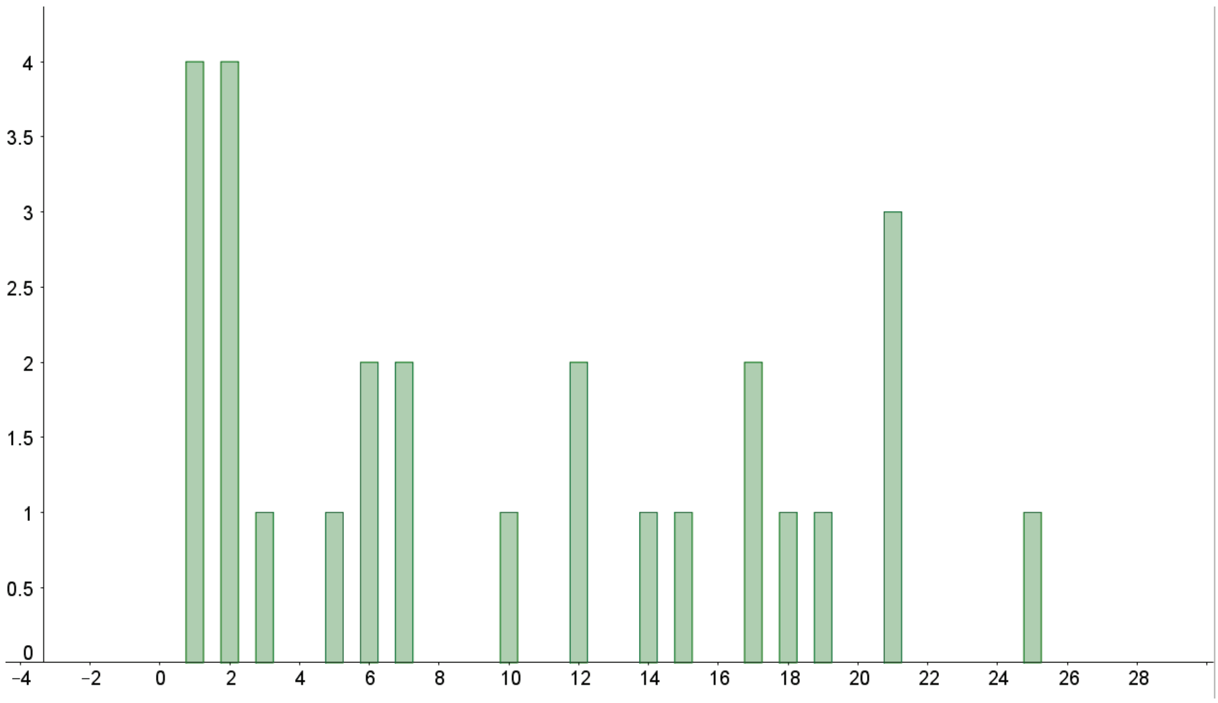


Abb. 40: Säulendiagramm der Wegezeiten der Klasse 7a

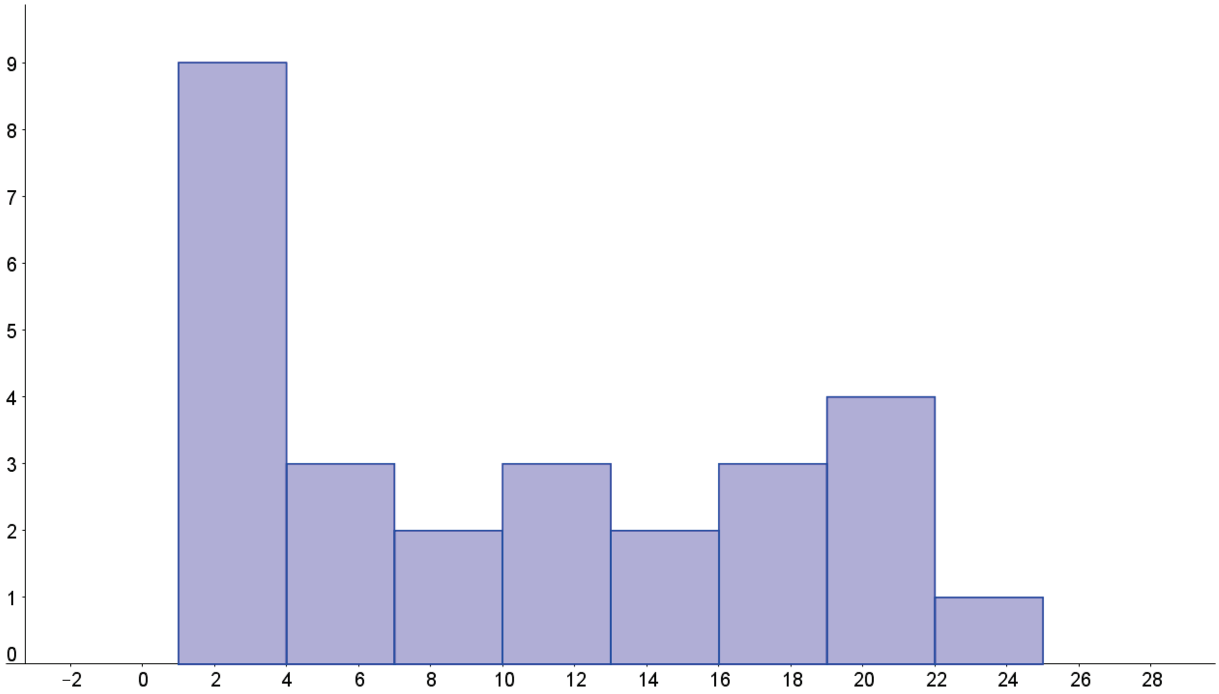


Abb. 41: Säulendiagramm mit Klasseneinteilung der Wegezeiten von Klasse 7a

Zum Zeichnen der Diagramme markiert man in der Tabelle die Spalte mit den Daten, klickt auf „Analyse einer Variablen", danach auf „Analyse" und wählt die Diagrammart (Balkendiagramm oder Histogramm) aus. Beim Zeichnen des Säulendiagramms mit Klasseneinteilung lässt sich mit einem Schieberegler die Anzahl der Klassen einstellen und zusätzlich unter Einstellungen die Art des Intervalls (… ≤ x < … bzw. … < x ≤ …).

26. Das empirische Gesetz der großen Zahlen (Münzwurf)

Das empirisches Gesetz der großen Zahlen geht zurück auf JAKOB BERNOULLI (1655 bis 1705) und lautet folgendermaßen: Ist A ein Ereignis eines Zufallsexperiments, so stabilisieren sich bei einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen dieses Experiments die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$.

Besonders einfach lässt sich diese Erfahrung am Beispiel des Münzwurfs demonstrieren. Im Folgenden wird das tausendmalige Werfen einer Münze simuliert und die relative Häufigkeit in Abhängigkeit von der Versuchszahl n graphisch dargestellt. Von zentraler Bedeutung ist dazu der Befehl Zufallszahl(<Minimalwert> , <Maximalwert>). Er erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall [Minimalwert; Maximalwert]. Durch Betätigung der Tastenkombination „Str" „R" kann man eine neue Simulation durchführen. Man erkennt dabei sehr schön, dass die relative Häufigkeit am Anfang der Versuchsreihe stark schwankt und sich dann mit zunehmender Versuchszahl um den theoretischen Wert $\frac{1}{2}$ (rote Linie) stabilisiert, wenngleich auch immer wieder einmal etwas größere Abweichungen auftreten können.

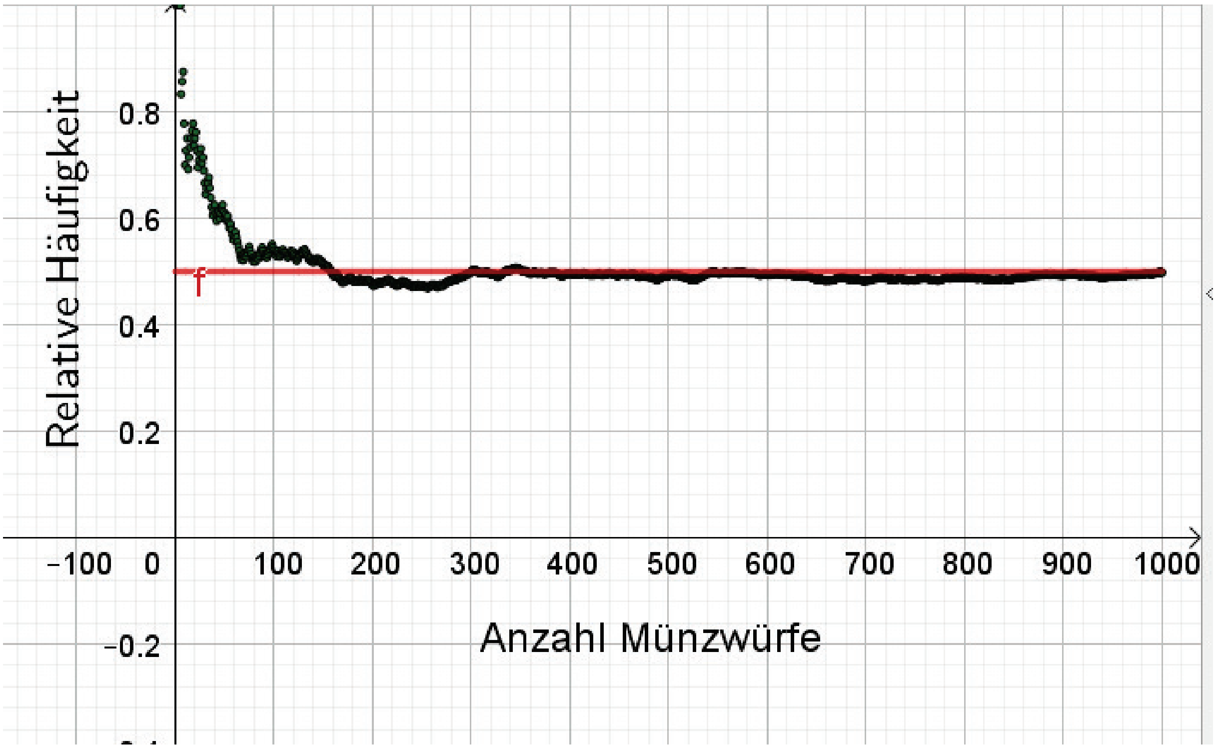


Abb. 42: Simulation: 1000-faches Werfen einer Münze

26.1. Beschreibung zur Erstellung des Arbeitsblattes „Münzwurf“

Man erzeugt eine Liste mit 1000 Zufallszahlen von 0 bzw. 1 durch Eingabe von Folge(Zufallszahl(0, 1), n, 1, 1000). Dadurch wird das Werfen von Wappen (0) bzw. Kopf (1) simuliert. Die Ergebnisse werden im Algebrafenster in einer Liste l1 dargestellt. Man berechnet anschließend die relativen Häufigkeiten für das Auftreten von 1 nach dem n-ten Wurf durch Eingabe von Folge(Summe(l1, n) / n, n, 1, 1000). Die Ergebnisse werden in einer Liste l2 dargestellt. Anschließend zeichnet man die zugehörigen Punkte durch Eingabe von Folge((n, Element(l2, n)), n, 1, 1000). Den Graphen für die Wahrscheinlichkeit kann man durch Eingabe von Funktion(0.5, 0, 1000) einzeichnen.

Um die vertikale Achse senkrecht zu beschriften, gibt man bei Text ein „\rotatebox{90}, {Relative\:Häufigkeit}“, nachdem man durch einen Haken „LaTeX Formel“ aktiviert hat.

27. Das pascalsche Dreieck

Die Behandlung der Themenstellung „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“ führt auf Binomialkoeffizienten. In diesem Zusammenhang bietet es sich an, das pascalsche Dreieck zu behandeln. Es ist eine Form der grafischen Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Diese lassen sich aus dem Dreieck einfach ablesen. Dabei kann die Variable n als Zeilenindex und k als Spaltenindex interpretiert werden, wobei die Zählung mit Null beginnt (also erste Zeile n=0, erste Spalte k=0). Das folgende Geogebraarbeitsblatt veranschaulicht die Zusammenhänge.

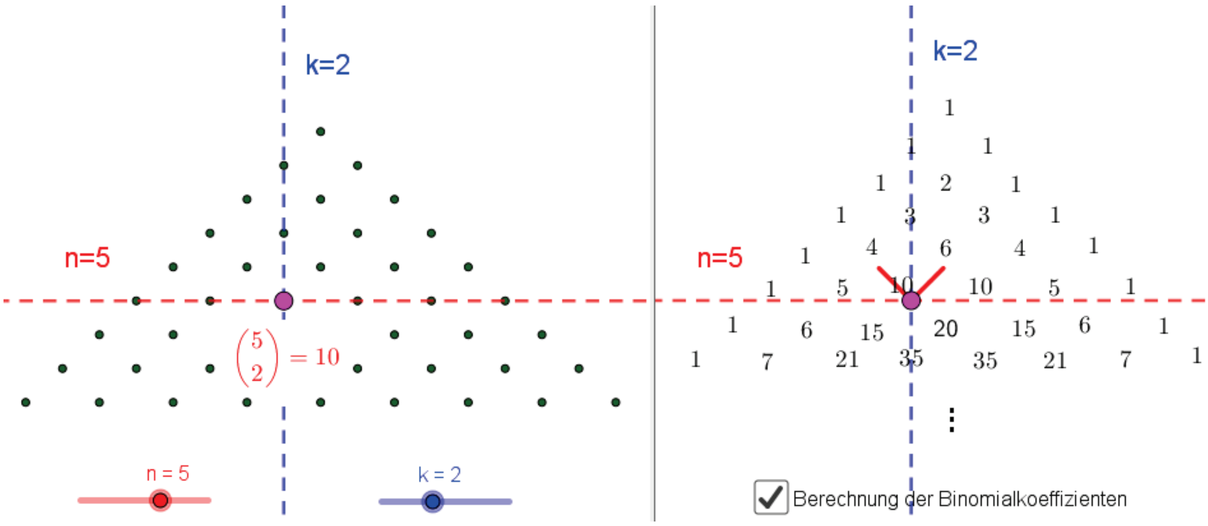


Abb. 43: Das pascalsche Dreieck

Bei der Erstellung des Arbeitsblattes hat sich der Autor an der auf der Geogebrawebseite abgebildeten Graphik von A. Lindner orientiert und diese modifiziert.

28. Der Baumdiagramm-Generator

Die folgende Geogebra-Datei von Andreas Wittig eignet sich zum Erstellen von Baumdiagrammen für Arbeitsbogen und Klausuren. Die Datei kann von der Geogebra-Webseite heruntergeladen werden: Link: https://ggbm.at/TEXkgCKn

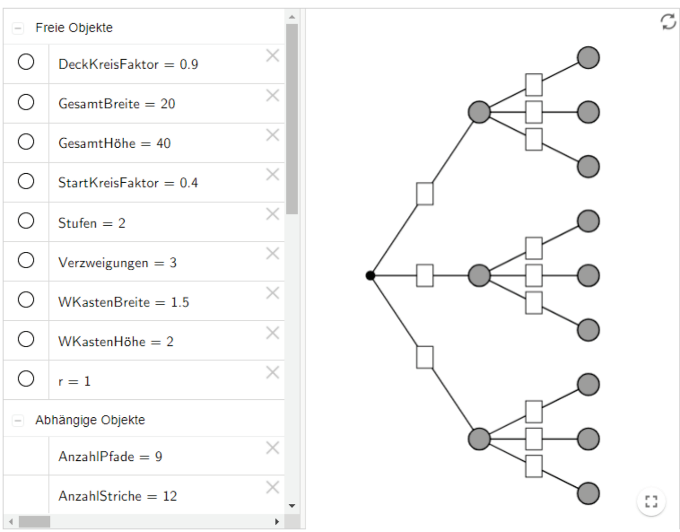


Abb. 44: Der Baumdiagramm-Generator

Die rechteckigen Kästchen, deren Höhe und Breite man verändern kann, sind für die einzelnen Zweigwahrscheinlichkeiten gedacht. Weiterhin kann man die Höhe und die Breite des Baumdiagramms sowie die Anzahl der Stufen und Verzweigungen einstellen.

29. Simulation: 1000 Würfe von vier Münzen

Nach einer ersten Behandlung in der Klassenstufe 8 erfolgt in der Klassenstufe 10 eine Vertiefung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In den meisten Schulbüchern erfolgt dazu eine Wiederholung der grundlegenden Begrifflichkeiten anhand einfacher Zufallsexperimente. Interessanter und intellektuell fordernder ist es, wenn man die folgende - etwas vielschichtigere - Aufgabe als (Wieder)einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung wählt: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von 4 Münzen 0, 1, 2, 3 oder 4 Mal Wappen fällt?* Die Aufgabe ist für die Schüler nach den Erfahrungen des Autors so komplex, dass die Lösung von ihnen in der Regel nicht vollständig überblickt wird. Man kann die Aufgabe auch in einen Kontext einbetten Dies hat W. Herget in *mathematik lehren,* Heft 85, 1998, S. 4 – 7 beschrieben (Stichwort: Lehrer Lämpel). Man sollte den Schülern zunächst Zeit geben, eigene Erfahrungen mit Zufallsexperimenten zu sammeln, indem sie z. B. in Zweiergruppen jeweils 10 Würfe von 4 Münzen durchführen. Die Ergebnisse aller Gruppen können dann vom Lehrer mithilfe der Tabelle von Geogebra gesammelt und graphisch als Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt werden. Das Werfen der Münzen bereitet die Möglichkeit für die theoretische Lösung (Wahrscheinlichkeitsverteilung) durch systematisches Zählen vor: wwww, zwww, wzww, … Die folgende Graphik zeigt die mit Geogebra erstellte Simulation der Häufigkeitsverteilung nach dem tausendmaligen Werfen von 4 Münzen. Durch Drücken der Tastenkombination „Strg“ „R“ kann eine neue Simulation durchgeführt werden. Zusätzlich kann über ein Kontrollkästchen die Wahrscheinlichkeitsverteilung eingeblendet werden.

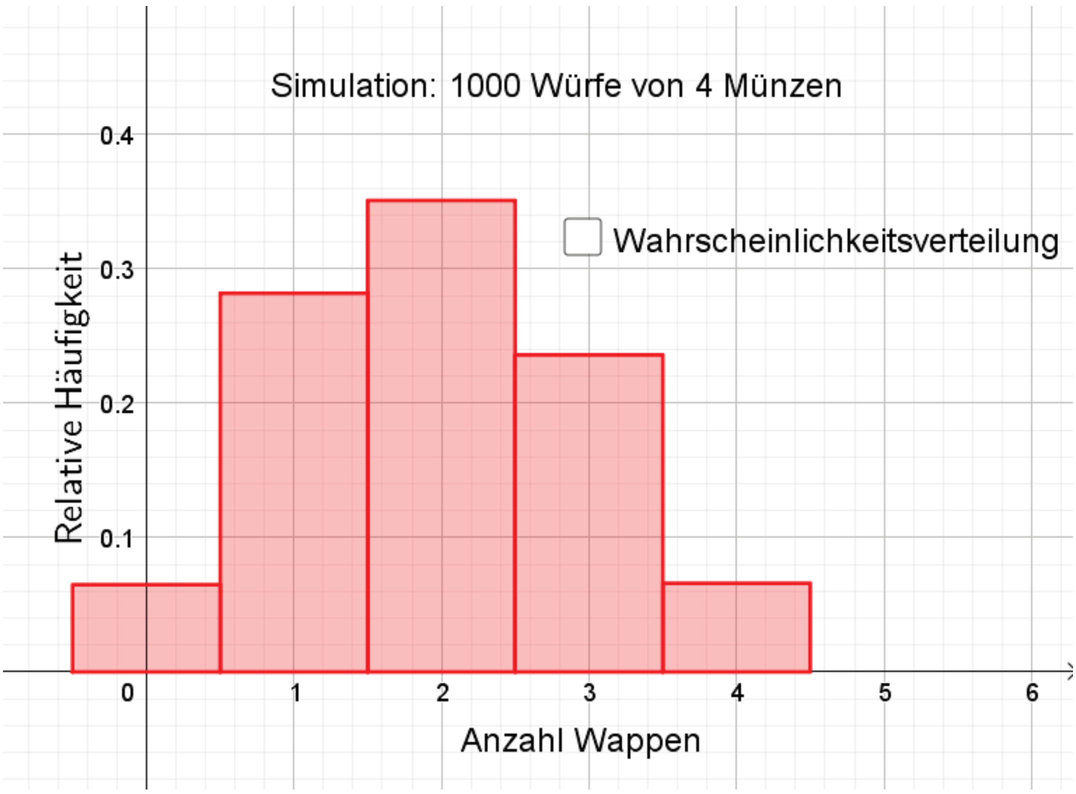


Abb. 45: Häufigkeitsverteilung zum 1000maligen Werfen von 4 Münzen

Das Geogebraarbeitsblatt kann man durch Eingabe von 6 Befehlen überraschend schnell und einfach erstellen.

V. Geogebra-Lernumgebungen

Im Folgenden werden zwei Geogebra-Lernumgebungen zu den Themen „Quadratische Funktionen mit Parametern“ und „Sinusfunktionen mit Parametern“ vorgestellt. Es handelt sich hierbei um verlinkte Geogebra-Arbeitsblätter (sog. Geogebrabooks), die die Schüler mehrere Stunden lang relativ selbstständig zusammen mit einem Partnerschüler bearbeiten. Der Einsatz solcher Lernumgebungen ist auf unterschiedliche Art und Weise denkbar. 1. Zur vollständig neuen Erarbeitung eines Themenkomplexes, 2. zur kompakten Gesamtwiederholung am Ende einer Unterrichtsreihe (z. B. wenn der Unterrichtsgang durch Schulferien unterbrochen wurde). Wie bei allen Methoden, bei denen Schüler relativ selbstständig arbeiten, muss auf eine seriöse Ergebnissicherung geachtet werden. Die Partnerarbeit muss also nach bestimmten Abschnitten jeweils unterbrochen werden und die Ergebnisse und ggf. auch die Lösungswege müssen im Plenum besprochen werden. Bewährt hat sich auch die Begleitung durch sog. Sicherungsbogen, auf denen die Schüler ihre Ergebnisse notieren sollen und die zusätzliche Informationen und weiteres Aufgabenmaterial zur Übung enthalten. Die verlinkten Arbeitsblätter zu den beiden Themen werden im Folgenden vorgestellt und sind auch über den Bildungsserver zugänglich. Die Sicherungsbogen werden nur auszugsweise vorgestellt, um den Umfang dieser Abhandlung im Rahmen zu halten.

30. Geogebra-Lernumgebung „Quadratische Funktionen mit Parametern“

Ziel dieser Unterrichtseinheit ist es, dass sich die Schülerinnen und Schüler den Einfluss von Parametern bei quadratischen Funktionen in Scheitelpunktsform $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ bzw. in allgemeiner Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ möglichst selbstständig erarbeiten. Dazu wurden 7 dynamische Geogebra-Arbeitsblätter miteinander verlinkt, anhand derer die Schülerinnen und Schüler sukzessiv den Einfluss der Parameter analysieren können:

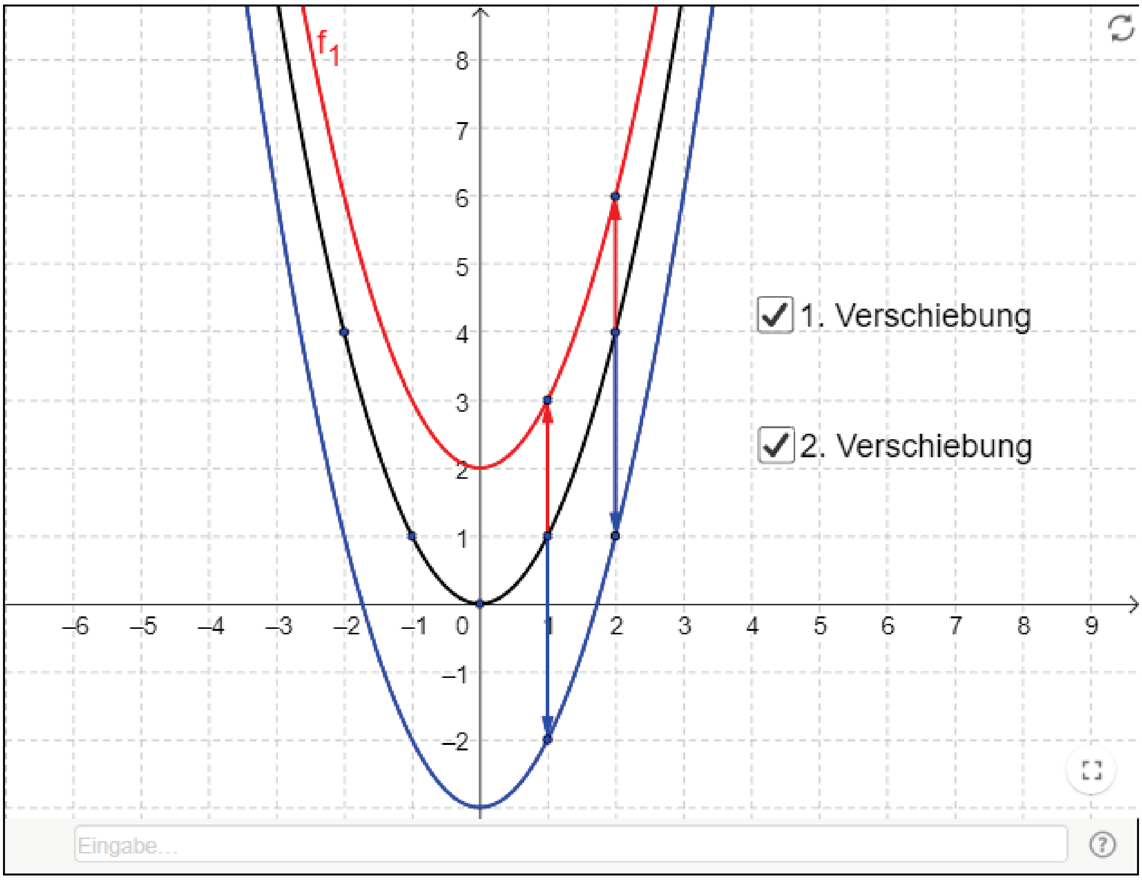
1. Verschieben der Normalparabel in y-Richtung
2. Verschieben der Normalparabel in x-Richtung
3. Verschieben der Normalparabel in beliebiger Richtung
4. Umkehraufgabe Normal/Scheitelpunktsform
5. Strecken, Stauchen und Spiegeln der Normalparabel
6. Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion
7. Umkehraufgabe Normal/Scheitelpunktsform

Blatt 1

Verschieben der Normalparabel in y-Richtung

Autor: doering

Die Graphik zeigt die Normalparabel. Betätige hintereinander die beiden Kontrollkästchen und gib den Funktionsterm der verschobenen Funktion an. Du kannst Dich von der Richtigkeit Deines Ergebnisses überzeugen, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile eingibst!



Verallgemeinere nun Dein Ergebnis! Den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = x^2 + e$ erhält man durch Verschieben der Normalparabel parallel zur y-Achse, und zwar durch
- Verschieben nach oben, falls e   0,
- Verschieben nach unten falls e   0.

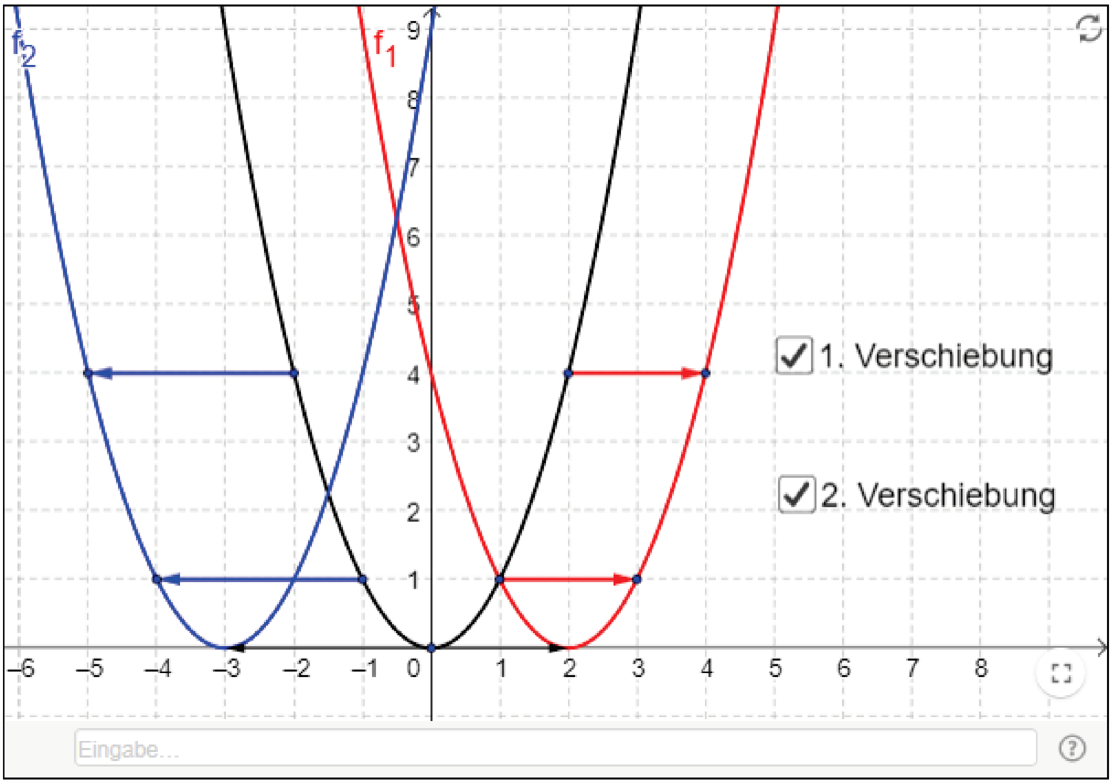
Der Scheitelpunkt der verschobenen Funktion lautet S(/   ).

Blatt 2

Verschieben der Normalparabel in x-Richtung

Autor: doering

Die Graphik zeigt die Normalparabel. Betätige hintereinander die beiden Kontrollkästchen und gib den Funktionsterm der verschobenen Funktion an. Du kannst Dich von der Richtigkeit Deines Ergebnisses überzeugen, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile eingibst!



Verallgemeinere nun Dein Ergebnis! Den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = (x - d)^2$ erhält man durch Verschieben der Normalparabel parallel zur x-Achse, und zwar durch

- Verschieben nach rechts, falls d 0,
- Verschieben nach links falls d 0.

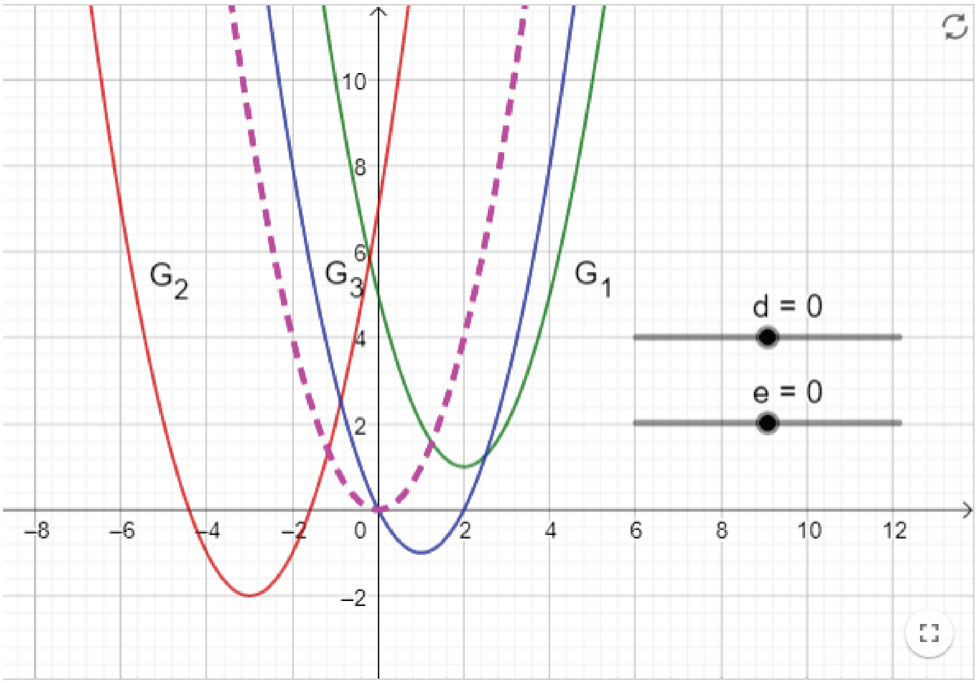
Der Scheitelpunkt der verschobenen Funktion lautet S(/).

Blatt 3

Verschieben der Normalparabel in beliebiger Richtung

Autor: doering

Die sog. Scheitelpunktsform der verschobenen Normalparabel lautet $f(x) = (x - d)^2 + e$
mit dem Scheitelpunkt S(d/e).
Bringe die Normalparabel (margenta, gestrichelt) durch Betätigen der Schieberegler für d und e zur Deckung mit den Graphen von G_1 - G_3, notiere die dazugehörigen Funktionsterme $f_1(x)$ - $f_3(x)$ und schreibe diese auch in der Form $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$!



Blatt 4

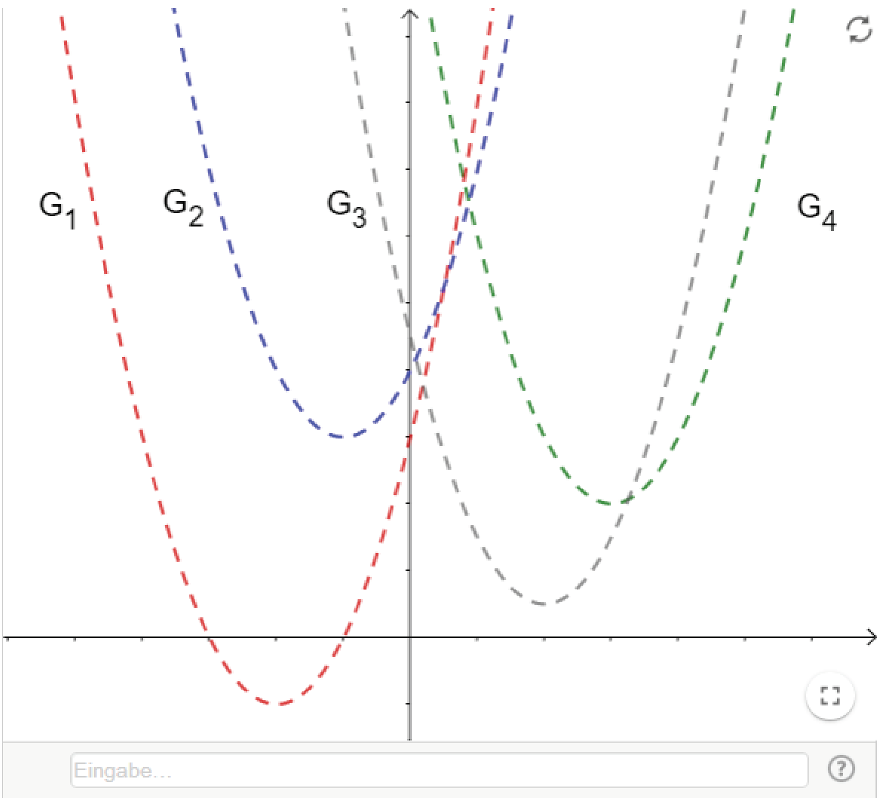
Umkehraufgabe Normal/Scheitelpunktsform

Autor: doering

4 verschobene Normalparabeln sind in ausmultiplizierter Form (sog. Normalform) gegeben.

$f_1(x) = x^2 - 6x + 11$ $f_2(x) = x^2 + 4x + 3$ $f_3(x) = x^2 + 2x + 4$ $f_4(x) = x^2 - 4x + 9/2$

Bringe die 4 Funktionsterme mithilfe der quadratischen Ergänzung auf die Scheitelpunktsform und überprüfe die Richtigkeit Deines Ergebnisses, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile unten eingibst. Der zugehörige Graph muss jetzt mit einem der 4 gezeichneten Graphen zur Deckung kommen. Sollte dies - wider Erwarten - nicht der Fall sein, kannst Du oben rechts auf den "Rückgängig-Button" gehen.



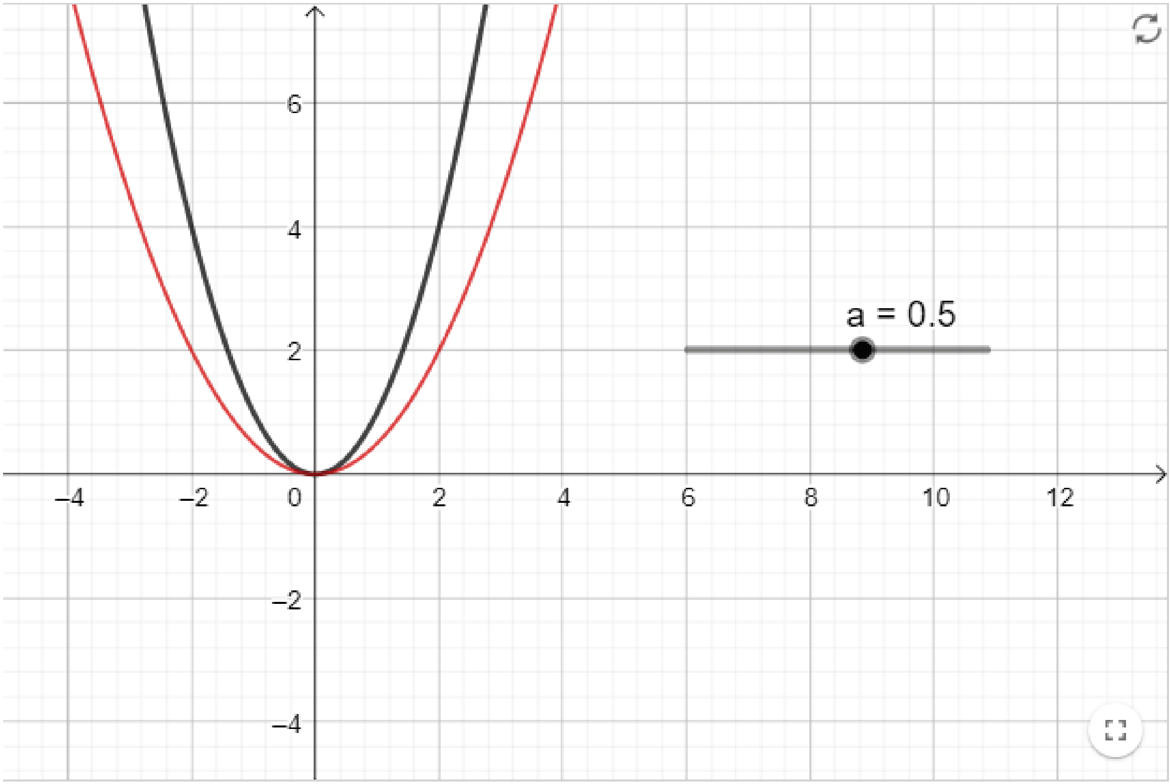
Anmerkung: Bei diesem Arbeitsblatt wurden bewusst das Koordinatengitter und die Zahlenwerte der Achseneinteilungen entfernt, damit die Schüler die Scheitelpunktsform nicht einfach ablesen können.

Blatt 5

Strecken, Stauchen und Spiegeln der Normalparabel

Autor: doering

Wie verändert sich der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ in Abhängigkeit des Parameters a?
Verschiebe dazu den Schieberegler für a nach links bzw. rechts!
Um die Unterschiede deutlich zu machen, ist die Normalparabel schwarz eingezeichnet.



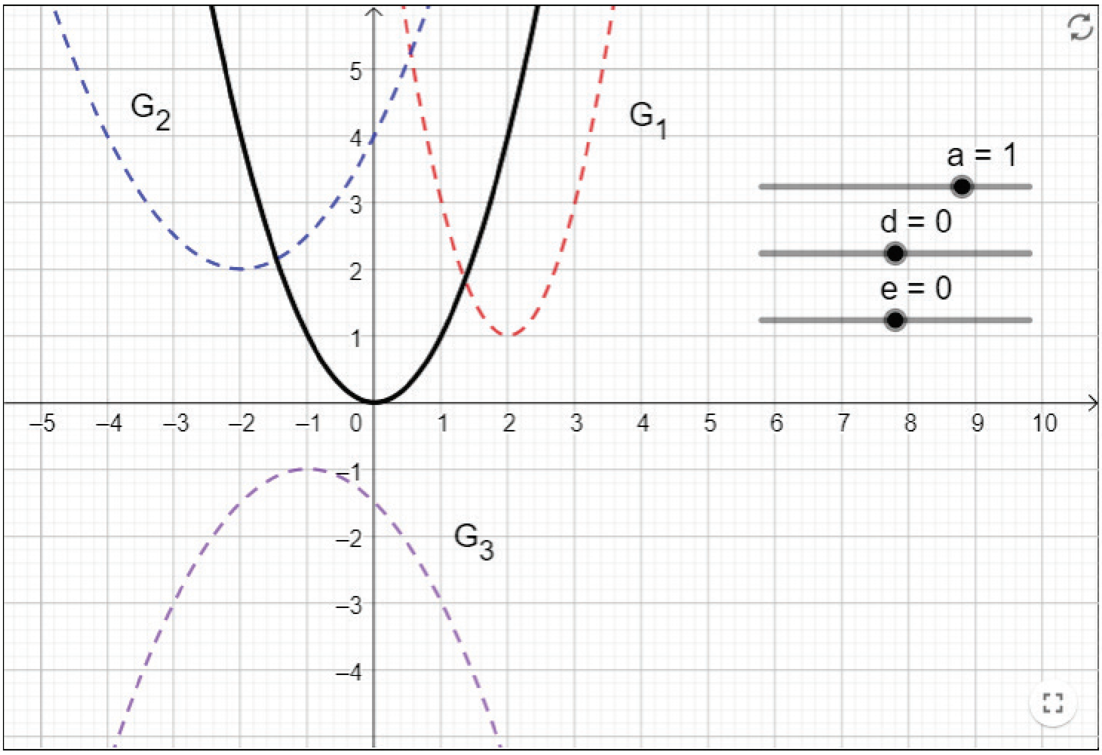
Verallgemeinere jetzt das Ergebnis, indem Du die folgenden Aussagen ergänzt!
|a| 1: Der Graph ist in y-Richtung gestreckt, wodurch er schmaler erscheint und steiler ist.
|a| 1: Der Graph ist in y-Richtung gestaucht, wodurch er breiter erscheint und flacher ist.
a   0: Der Graph ist nach oben geöffnet.
a   0: Der Graph ist nach unten geöffnet.

Blatt 6

Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion

Autor: doering

Die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion lautet $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ mit dem Scheitelpunkt S(d/e). Ermittle mithilfe der Schieberegler für a, d und e die Funktionsgleichungen zu den Graphen G_1 - G_3! Stelle diese anschließend in der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dar!



Blatt 7

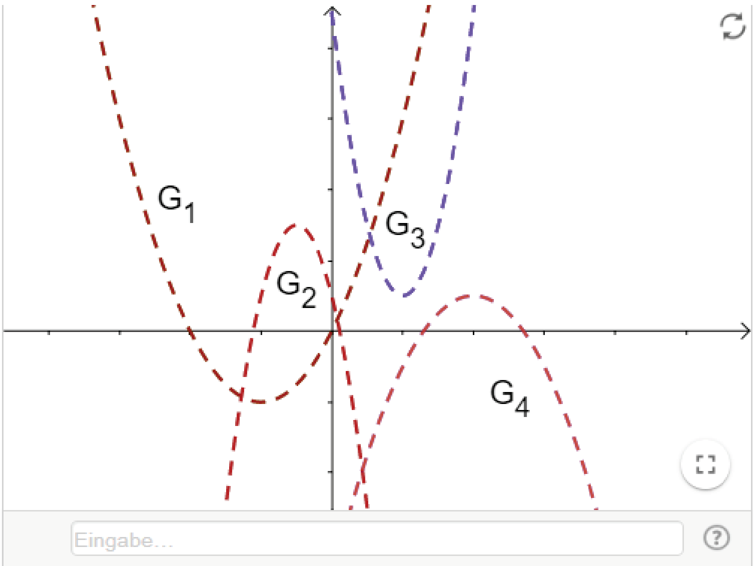
Umkehraufgabe Normal/Scheitelpunktsform bei quadratischen Funktionen

Autor: doering

4 verschobene quadratische Funktionen sind in ausmultiplizierter Form (sog. Normalform) gegeben.

$f_1(x) = 1/2x^2 + 2x$ $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 9$ $f_3(x) = -2x^2 - 4x + 1$ $f_4(x) = -1/2x^2 + 4x - 7$

Bringe die 4 Funktionsterme mithilfe der quadratischen Ergänzung auf die Scheitelpunktsform und überprüfe die Richtigkeit Deines Ergebnisses, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile unten eingibst. Der zugehörige Graph muss jetzt mit einem der 4 gezeichneten Graphen zur Deckung kommen. Sollte dies - wider Erwarten - nicht der Fall sein, kannst Du oben rechts auf den "Rückgängig-Button" gehen.



Anmerkung: Auch bei diesem Arbeitsblatt wurden bewusst das Koordinatengitter und die Zahlenwerte der Achseneinteilungen entfernt, damit die Schüler die Scheitelpunktsform nicht einfach ablesen können.

Im Folgenden wird als Beispiel die 1. Seite der sog. Sicherungsbogen zur Lernumgebung angegeben, den die Schüler zur Orientierung bei der Arbeit mit der Lernumgebung und zur Ergebnissicherung erhalten. Auf dem Sicherungsbogen erhalten die Schüler auch notwendige Zusatzinformationen (z. B. zum Umschreiben der Normalform in die Scheitelpunktsform mithilfe der quadratischen Ergänzung; vgl. nächste Seite unten).

31. Sicherungsbogen zur Lernumgebung (Seite 1)

Bearbeite Seite 1 der Lernumgebung!

1. Ergebnissicherung: Den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 + e$ erhält man durch Verschieben der Normalparabel parallel zur y-Achse, und zwar durch

- Verschieben nach oben, falls e   0,
- Verschieben nach unten falls e   0.

Der Scheitelpunkt der verschobenen Funktion lautet S(/).

Bearbeite Seite 2 der Lernumgebung!

2. Ergebnissicherung: Den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x - d)^2$ erhält man durch Verschieben der Normalparabel parallel zur x-Achse, und zwar durch

- Verschieben nach rechts, falls d   0,
- Verschieben nach links falls d   0.

Der Scheitelpunkt der verschobenen Funktion lautet S(/).

Bearbeite Seite 3 der Lernumgebung!

3. Ergebnissicherung

Funktionsterme der Graphen G_1 bis G_3 in der Scheitelpunkts- und in der Normalform!

Graph	Scheitelpunktsform $f(x) = (x-d)^2 + e$	Normalform $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$
G_1		
G_2		
G_3		

Im Folgenden sollst Du eine quadratische Funktion, die in der Normalform gegeben ist, auf die Scheitelpunktsform bringen. Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Der Funktionsterm muss zunächst mithilfe der sog. **quadratischen Ergänzung** anders geschrieben werden. Vorübung: $(x - b)^2 = x^2 - 2xb + b^2$. b erhält man aus dem mittleren Summanden 2xb, indem man 2xb durch 2x teilt. Hier: $\frac{4x}{2x} = 2$. Diese Zahl muss quadriert werden ($2^2 = 4$); das ist die sog. quadratische Ergänzung. Damit der Funktionsterm insgesamt nicht verändert wird, wird **zunächst 4 addiert und danach wieder subtrahiert**: $f(x) = x^2 - 4x$ **+4 – 4** +3. Zusammenfassung der ersten 3 Summanden nach der 2. binomischen Formel ergibt. $f(x) = (x- 2)^2 -1$. Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten S(2/-1). **Tipp:** Bei den folgenden Aufgaben ist es unbedingt empfehlenswert mit Brüchen und nicht mit Dezimalzahlen zu arbeiten!

32. Geogebra-Lernumgebung „Sinusfunktionen mit Parametern"

Die Behandlung der trigonometrischen Funktionen mit allen Parametern ist nach dem neuen RLP explizit nur noch für die Sinusfunktionen vorgesehen. Ziel der folgenden Unterrichtseinheit ist es, dass sich die Schülerinnen und Schüler den Einfluss der Parameter bei Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ möglichst selbstständig erarbeiten. Dazu wurden 6 dynamische Geogebra-Arbeitsblätter miteinander verlinkt, anhand derer die Schülerinnen und Schüler sukzessiv den Einfluss der Parameter analysieren können:

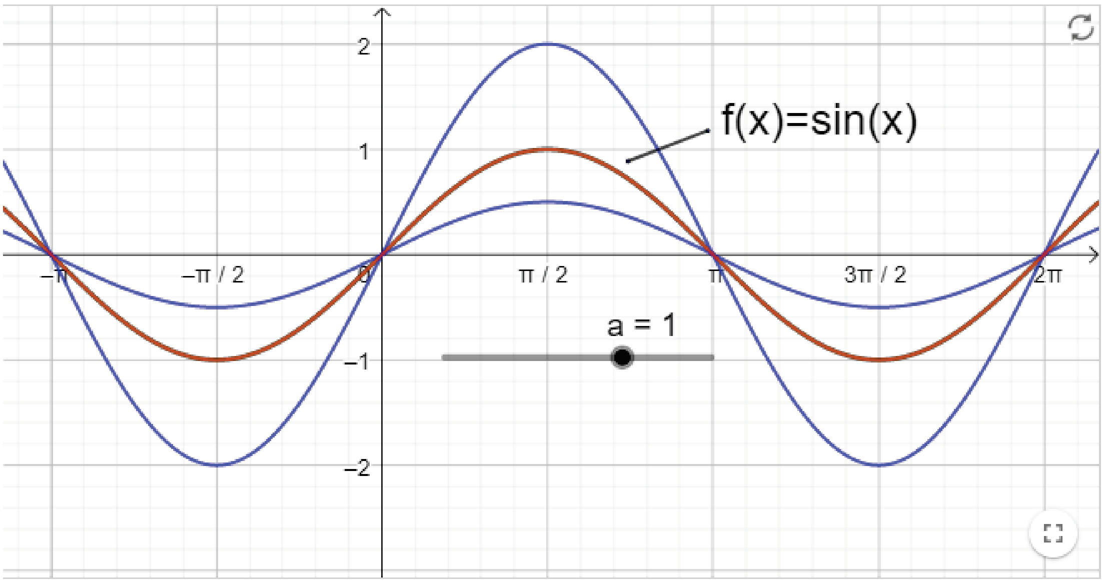
1. Strecken und Stauchen in y-Richtung
2. Strecken und Stauchen in x-Richtung
3. Funktionsgleichungen des Typs $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$
4. Verschieben in x-Richtung
5. Funktionsgleichungen des Typs $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c))$
6. Funktionsgleichung des Typs $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

Blatt 1

Strecken und Stauchen der Sinusfunktion in y-Richtung

Autor: doering

Im Folgenden soll der Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot sin(x)$ untersucht werden. Betätige dazu den Schieberegler für den Parameter a und bringe den Graphen mit den beiden blau gezeichneten Graphen zur Deckung. Notiere die Funktionsterme und verallgemeinere das Ergebnis für a > 0!



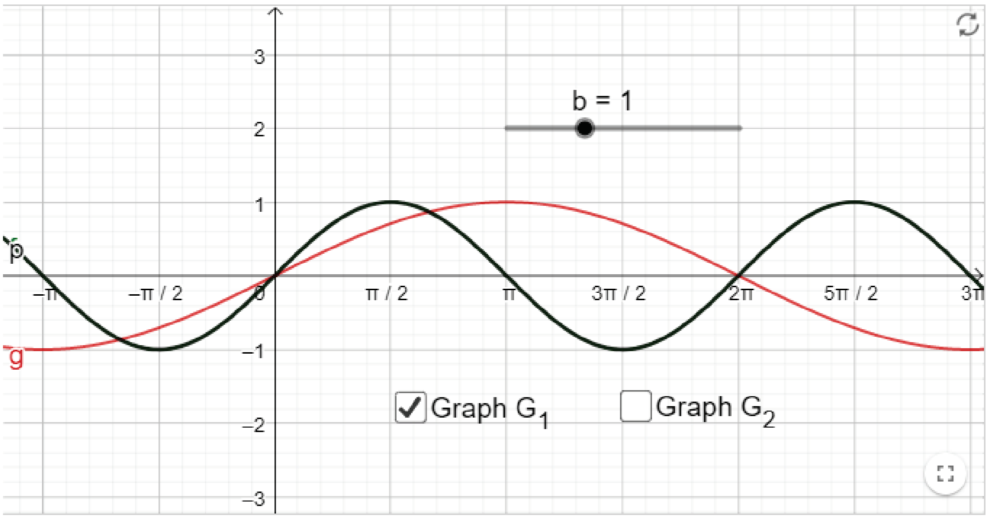
a   1: Streckung in y-Richtung
0 < a   1: Stauchung in y-Richtung

Blatt 2

Strecken und Stauchen in x-Richtung

Autor: doering

Im Folgenden soll der Einfluss des Faktors b auf den Verlauf des Graphen der Funktion f mit f(x) =sin(bx) mit b > 0 untersucht werden.
Durch Bedienen der Kontrollkästchen kann jeweils ein gestreckter bzw. gestauchter Graph (G_1 bzw. G_2) eingeblendet werden. Bringe durch Betätigen des Schiebereglers für b den Graphen von f(x) = sin(bx) zur Deckung mit dem Graphen G_1 bzw. G_2. Notiere die Funktionsterme von G_1 bzw. G_2!



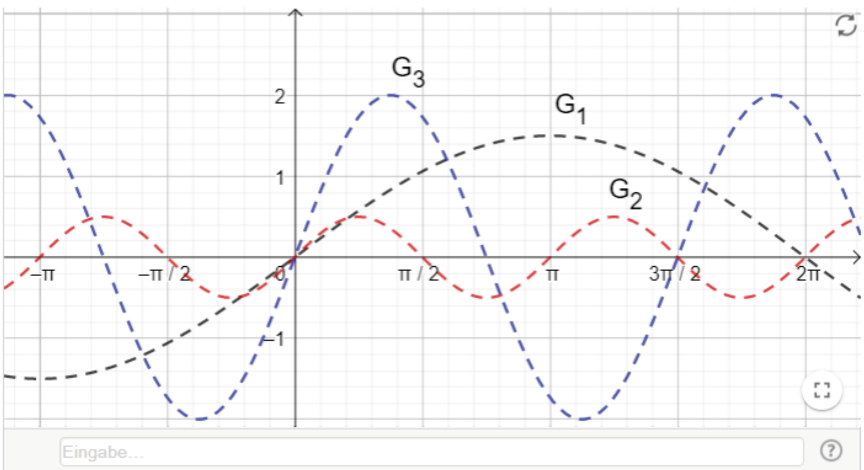
Verallgemeinere jetzt das Ergebnis!
b 1: Stauchung in x-Richtung,
0 < b 1: Streckung in x-Richtung
Welcher wichtige Zusammenhang besteht zwischen der Periode p der Funktion und dem Faktor b? p =

Blatt 3

Funktionsgleichungen des Typs f(x)=asin(bx)

Autor: doering

Gib zu den abgebildeten Graphen G_1 - G_3 die passenden Funktionsgleichungen an! Du kannst Dich von der Richtigkeit Deines Ergebnisses überzeugen, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile eingibst. Der passende Graph wird dann "überschrieben".

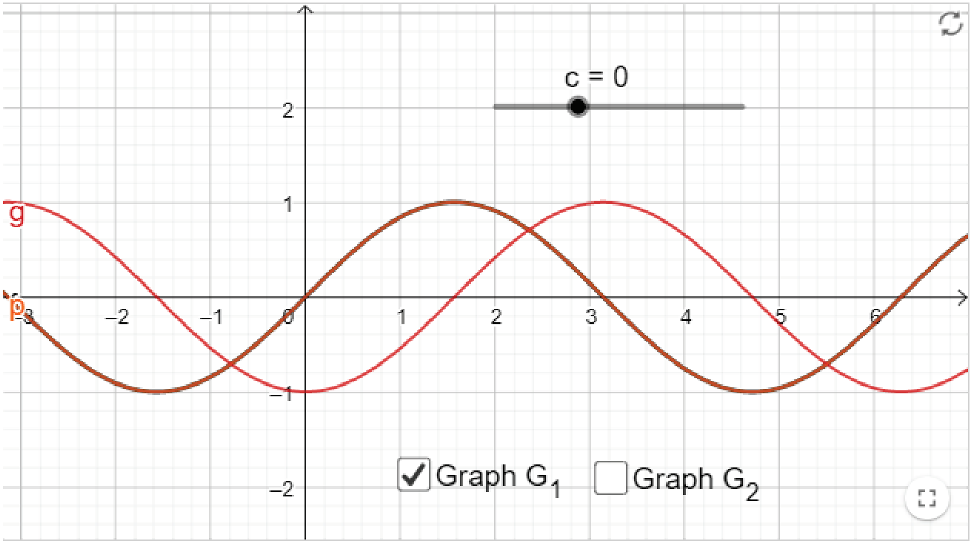


Blatt 4

Verschieben in x-Richtung

Autor: doering

Im Folgenden soll der Einfluss des Parameters c bei der Funktion f mit f(x)=sin(x-c) untersucht werden. Bringe dazu den Graphen von f mit den Graphen von G_1 bzw. G_2 zur Deckung und notiere deren Funktionsterme!



In der Verallgemeinerung folgt:

c 0: Verschiebung nach rechts,

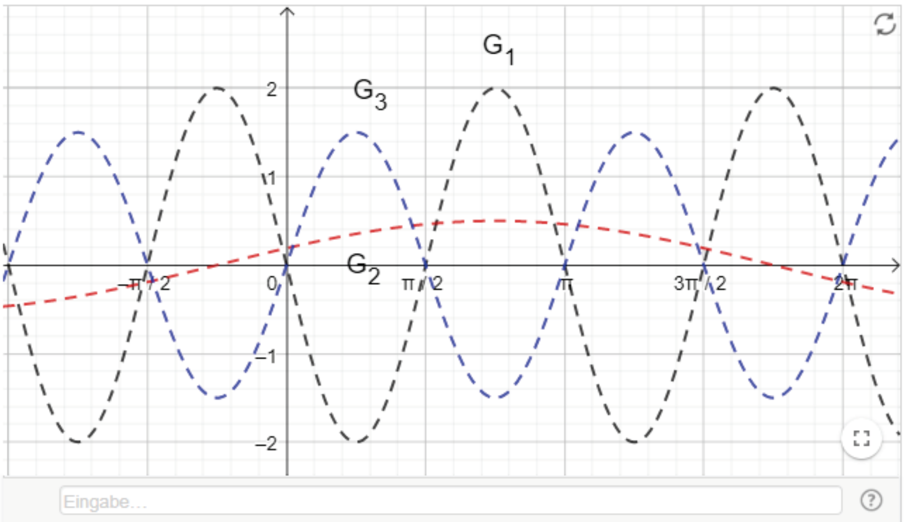
c 0: Verschiebung nach links

Blatt 5

Funktionsgleichungen des Typs asin(b(x-c))

Autor: doering

Gib zu den abgebildeten Graphen G_1 - G_3 die passenden Funktionsgleichungen an. Du kannst Dich von der Richtigkeit Deines Ergebnisses überzeugen, indem Du den Funktionsterm in die Eingabezeile eingibt. Der entsprechende Graph wird dann "überschrieben".

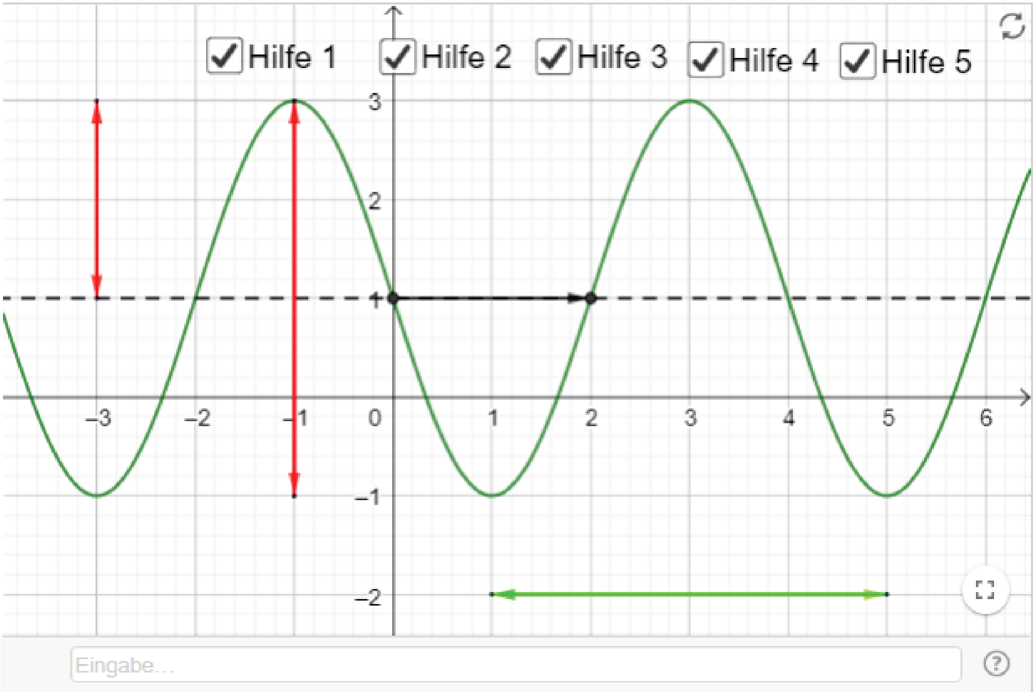


Blatt 6

Funktionsgleichung des Typs asin(b(x-c))+d

Autor: doering

Der Summand d in der allgemeinen Sinusfunktion f(x) = asin(b(x-c))+d bewirkt wie bei den Parabeln eine Verschiebung nach oben (d > 0) bzw. nach unten (d < 0).
Bestimme die Funktionsgleichung zu dem unten abgebildeten Graphen. Du kannst Dir dazu die Hilfepfeile einblenden. Gib danach den Funktionsterm zur Kontrolle in die Eingabezeile ein!



Auf der nächsten Seite ist die 1. Seite der Sicherungsbogen zur Lernumgebung angegeben. Neben der Ergebnissicherung und zusätzlichen Informationen sind zusätzliche Aufgaben integriert, die Übungen enthalten, bei denen sowohl Graphen anhand der Funktionsterme gezeichnet werden als auch Parameterwerte aus vorgegebenen Graphen ermittelt werden sollen (sog. Umkehraufgaben). Am Ende werden Aufgaben zu Modellierungen gestellt; z. B. Schwingungen, Temperaturverlauf an einem Tag, periodische Änderung des Wasserstandes durch die Gezeiten, usw.

33. Sicherungsbogen zur Lernumgebung (Seite 1)

Bearbeite Seite 1 der Lernumgebung!

1. **Einfluss des Parameters a:**

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin x$ wird in y-Richtung gestreckt, wenn a   1 und in y-Richtung gestaucht, wenn 0 < a   1.

Bearbeite Seite 2 der Lernumgebung!

2. **Einfluss des Parameters b:**

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(b \cdot x)$ wird in x-Richtung gestaucht, wenn b   1 und in x-Richtung gestreckt, wenn 0 < b   1. Zwischen der Periode p und dem Parameterwert b besteht folgender wichtige Zusammenhang:

$$p = \_\_\_\_\_ \Leftrightarrow b = \_\_\_\_\_$$

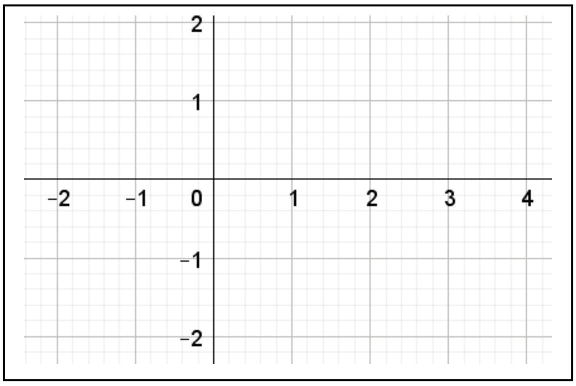
Bearbeite Seite 3 der Lernumgebung!

Funktionsterme und Parameterwerte der Graphen G_1 – G_3.

	Parameter a	Parameter b	Funktionsterm
Graph G_1			
Graph G_2			
Graph G_3			

Umkehraufgabe: Skizziere die Graphen folgender Funktionen (Tipp: Ermittle zunächst die Parameterwerte für a und die Werte für die Periode p mithilfe der Parameterwerte für b). Skizze der Graphen nur unter Verwendung von Hoch- und Tiefpunkten und Nullstellen!

$f_1(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$; $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi \cdot x)$



VI. Abbildungsgeometrie mit Matrizen

Das im Folgenden vorgestellte Thema geht über den RLP hinaus und ist insbesondere für den Unterricht in einem Wahlpflichtfach geeignet. Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen werden in der Mittelstufe üblicherweise rein zeichnerisch behandelt. Diese Abbildungen kann man natürlich auch rechnerisch darstellen. Geeignetes Mittel dafür sind Matrizen. Das Vorgehen sei am Beispiel der Spiegelung eines Punktes an der x-Achse erläutert.

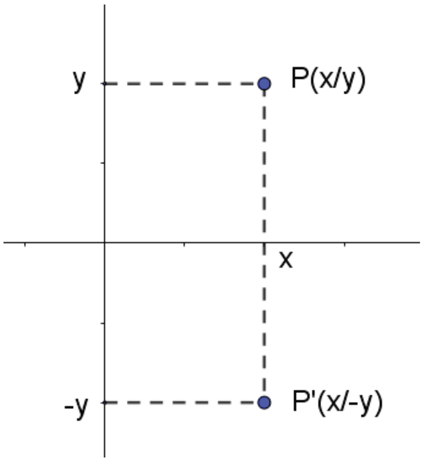


Abb. 46: Spiegelung eines Punktes an der x-Achse

Wenn man einen Punkt P(x|y) spiegelt, bleibt die x-Koordinate wie sie ist, und bei der y-Koordinate dreht sich das Vorzeichen um. Den Bildpunkt bezeichnet man üblicherweise mit P‘, die Koordinaten entsprechend mit x‘ und y‘. Für die Spiegelung an der x-Achse gelten also die Abbildungsgleichungen: (1) x‘ = x; (2) y‘ = -y bzw. in Matrixform:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A bezeichnet man als Abbildungsmatrix.

Die folgenden Abbildungen zeigen verschiedene geometrische Objekte, die auf unterschiedliche Weise abgebildet werden:

- Spiegelung an der y-Achse: A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Spiegelung an der Winkelhalbierenden: A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Punktspiegelung am Ursprung: A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Drehung um den Ursprung: A = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

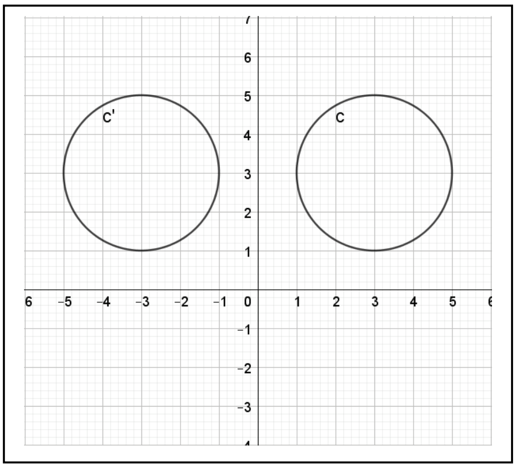


Abb. 47: Spiegelung an der y-Achse

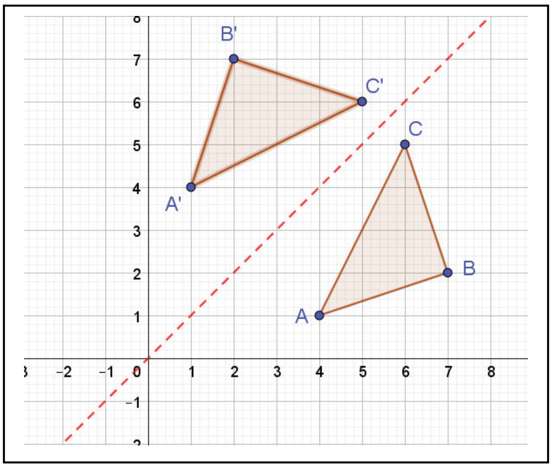


Abb. 48: Spiegelung an der Winkelhalbierenden

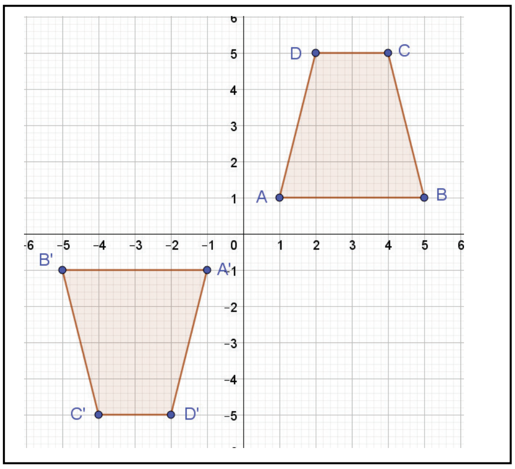


Abb. 49: Spiegelung am Ursprung

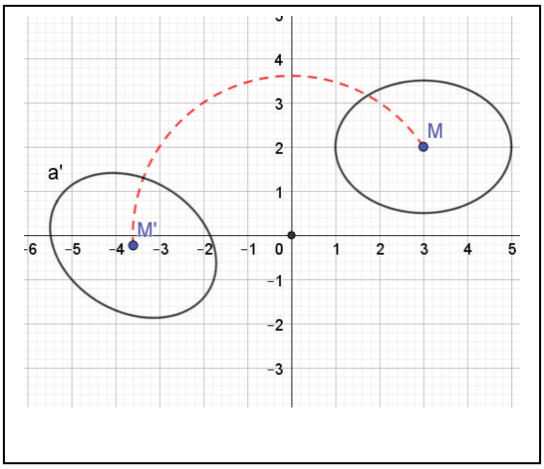


Abb. 50: Drehung um den Ursprung

Auch die Verkettung von Abbildungen lässt sich problemlos realisieren. Die folgende Abbildung zeigt ein Dreieck ABC, das zunächst an der y-Achse und danach an der x-Achse gespiegelt wurde. Es gilt: (1) $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und (2) $\overrightarrow{x''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x'}$. Setzt man (1) in (2) ein folgt: $\overrightarrow{x''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$. Die Verkettung der beiden Spiegelungen an den Koordinatenachsen entspricht also einer Punktspiegelung am Ursprung.

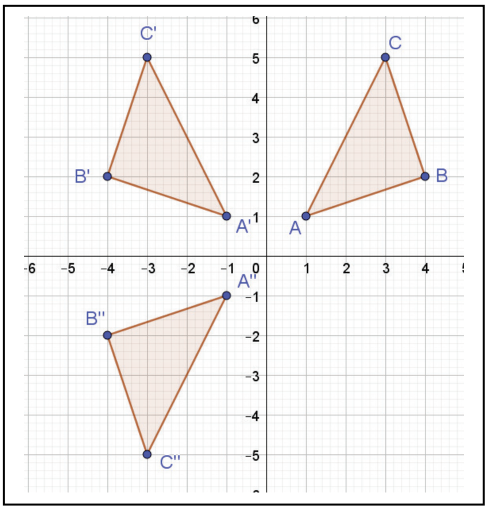


Abb. 51: Verkettung der Spiegelung an der y-Achse und an der x-Achse

Anhand des letzten Beispiels wird exemplarisch beschrieben, wie man diese Abbildungen mithilfe von Geogebra darstellen kann. Man stellt zunächst unter „Einstellungen" → „Objektnamen anzeigen" „Nur neue Punkte" ein. Dann zeichnet man unter Verwendung des Werkzeugs „Vieleck" ein Dreieck ABC im 1. Quadranten (Geogebrabezeichnung d1). Danach öffnet man das Tabellenfenster und gibt in die Zellen A1, B1, A2, B2 die einzelnen Elemente der Spiegelmatrix an der y-Achse ein: -1, 0, 0, 1. Man markiert die 4 Zellen und verwendet das Werkzeug „Matrix". Es erscheint ein Fenster mit der Bezeichnung m1. Man klickt in dem Fenster auf den Button „Erzeugen". Danach gibt man in die Eingabezeile folgenden Befehl ein: „MatrixAnwenden(m1,d1)". Das Bilddreieck A'B'C' wird gezeichnet. In analoger Weise erzeugt man das Dreieck A''B''C'' durch Spiegelung des Dreiecks A'B'C' an der x-Achse mithilfe der Matrix m2. Durch Eingabe von „Matrixanwenden(m2*m1,d1)" kann man sich davon überzeugen, dass durch die Verkettung der beiden Abbildungen ebenfalls das Bilddreieck A''B''C'' resultiert.

Das Thema Abbildungsgeometrie kann man um folgende Abbildungen erweitern: Streckung in x- bzw. y-Richtung, zentrische Streckung, Verschiebungen, Spiegelung an einer beliebigen Geraden vom Typ $y = m \cdot x + n$, Punktspiegelung an einem beliebigen Punkt $P(x_0/y_0)$, Scherung in Richtung der x- bzw. y-Achse, rückgängig Machen von Abbildungen mithilfe inverser Matrizen. Durch Mehrfachanwendungen ergeben sich attraktive Computergraphiken. Dies zeigt exemplarisch die folgende Abbildung mit einem Dreieck, das mit einer Reihe von zentrischen Streckungen abgebildet wurde. Dazu muss lediglich der folgende Befehl eingegeben werden: „Folge(MatrixAnwenden(k*m1, d1), k, -3, 3, 0.5)". Dabei ist m1 die Matrix für die Punktspiegelung am Ursprung und d1 die Bezeichnung für das Originaldreieck.

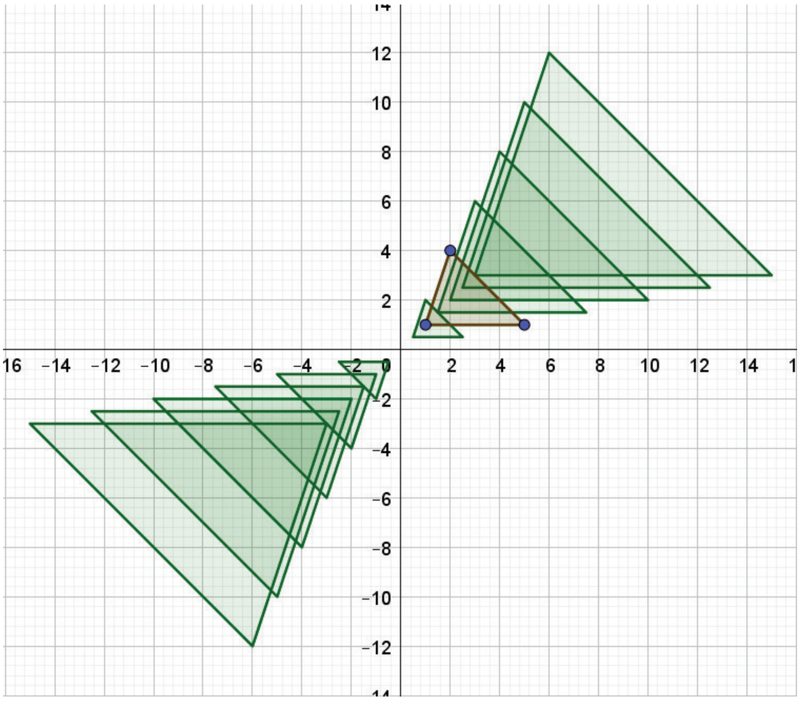


Abb. 52: Mehrfache zentrische Streckung eines Dreiecks

VII. Parameterdarstellung und Schieberegler

34. Parameterdarstellung von Geraden und Parabeln

Die sogenannte Parameterdarstellung von Kurven bietet viele Vorteile gegenüber der normalen Funktionsdarstellung, wird aber wegen der knapp bemessenen Unterrichtszeit in der Sek I meist nicht behandelt. Die im Folgenden angeführten Beispiele sind daher eher für den Wahlpflichtunterricht geeignet.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Parameterdarstellung von Kurven und dem in dynamischen Geometriesystemen implementierten Werkzeug „Schieberegler". Dies sei an folgender Einführungsaufgabe erläutert:

Der Lastkahn L startet im Hafen O(0/0) und fährt pro Stunde 8 km nach Osten und 6 km nach Norden. Der Dampfer D startet zum selben Zeitpunkt im Hafen H(49/0) und fährt pro Stunde 10 km nach Westen und 10 km nach Norden (Zahlenangaben in km). Stelle die Fahrtwege der beiden Schiffe graphisch dar. Kommt es zur Kollision?

Auf der Basis des normalen Mittelstufenunterrichts werden die Schüler die Funktionsgleichungen zu den Fahrtwegen aufstellen und diese graphisch darstellen. Die Kollisionsfrage können sie überprüfen, indem sie z. B. Punkte auf den Geraden nach 1 h, 2 h, 3 h usw. einzeichnen. Dies veranschaulicht die folgende Abbildung 53. Man erkennt, dass die Schiffe nicht kollidieren, weil der Dampfer den Schnittpunkt der Fahrwegsgeraden längst passiert hat, bevor der Lastkahn dort eintrifft.

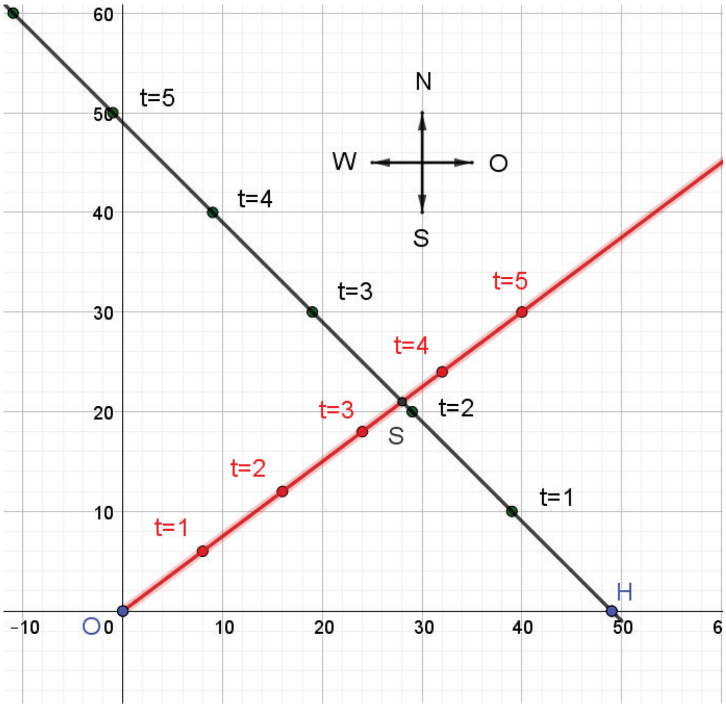


Abb. 53: Funktionsdarstellung zur Kollisionsaufgabe

Eleganter lässt sich die Aufgabe mit der sogenannten Parameterdarstellung der beiden Geraden lösen. Diese lautet: Lastkahn L: $x(t) = 8 \cdot t;\ y(t) = 6 \cdot t$ und Dampfer D: $x(t) = 49 - 10 \cdot t;\ y(t) = 10 \cdot t$. Bei der Darstellung mit Geogebra führt man einen Schieberegler für die Zeit t in h ein (min: 0; max. z. B. 6; Schrittweite 0.1) und gibt die Koordinaten für den Lastkahn L=(8t, 6t) und den Dampfer D=(49-10t, 10t) in die Eingabezeile ein. Wenn man den Spurmodus aktiviert, erkennt man, dass der Dampfer den Schnittpunkt der Fahrwegsgeraden nach 3 h bereits passiert hat während ihn der Lastkahn noch gar nicht erreicht hat (vgl. Abb. 54). Auch die Geraden der Fahrwege lassen sich in Geogebra als Parameterdarstellung zeichnen. Der Befehl dazu lautet Kurve(<Ausdruck>, <Ausdruck>, <Parameter>, <Startwert>, <Endwert>). Im Fall des Lastkahns würde man also für die Fahrt in den ersten 6 h folgendes eingeben: Kurve(8t, 6t, t, 0, 6).

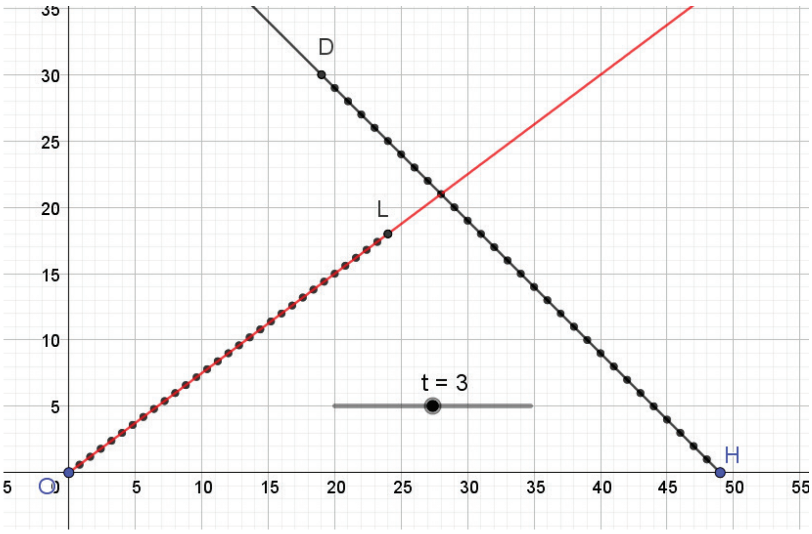


Abb. 54: Parameterdarstellung zur Kollisionsaufgabe

Neben der Darstellung von Geraden lassen sich auch Parabeln in der Sek I in Parameterform behandeln. Als Anwendungsbeispiele eignen sich hier Problemstellungen zum waagerechten bzw. schiefen Wurf. Das folgende Beispiel ist eine Modellierungsaufgabe zum waagerechten Wurf.

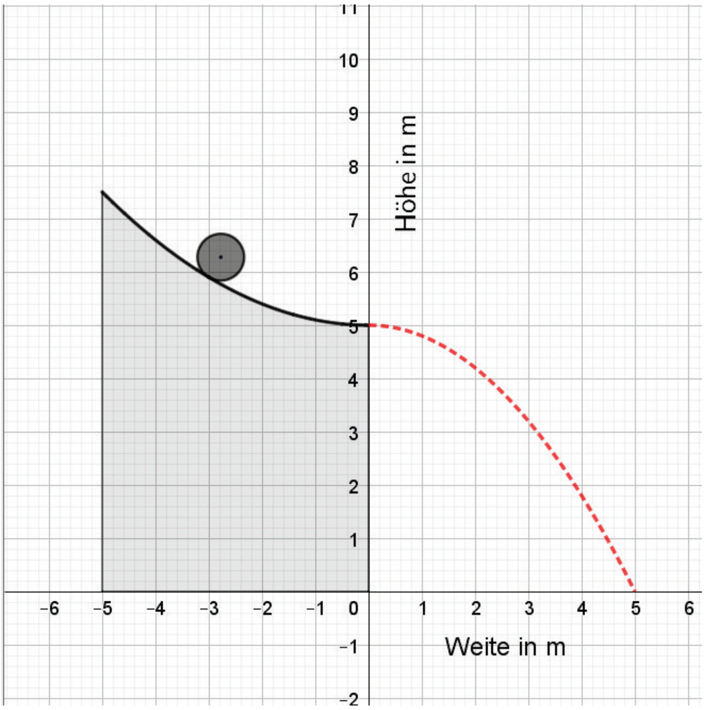


Abb. 55: Aufgabe „Fallende Kugel"

Eine Stahlkugel rollt einen parabelförmigen Abhang hinunter. Mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 m/s fliegt sie aus einer Höhe von 5 m waagerecht ab. Die Kugel ist in der obigen Abb. 55 im Verhältnis zu den Streckenlängen übertrieben groß dargestellt. Die Bewegung soll unter der Annahme modelliert werden, dass der Luftwiderstand vernachlässigbar ist und dass die Kugel als Punkt betrachtet werden kann. Fallgesetz: $y(t) = h - 5 \cdot t^2$.

Die Parameterdarstellung dazu lautet: $x(t) = 5 \cdot t;\ y(t) = 5 - 5 \cdot t^2;\ 0 \le t \le 1$ (t in s). Durch Eliminierung des Parameters t lässt sie sich in die übliche Funktionsdarstellung umschreiben: $f(x) = -\frac{1}{5} \cdot x^2 + 5$.

Als Beispiel für den schiefen Wurf sei folgende Aufgabe angeführt.

Eine Feuerwerksrakete wird mit 40 m/s mit einem Steigungswinkel von 70° aus einer Flasche abgefeuert. Stelle den Verlauf der Flugbahn mithilfe der Parameterdarstellung graphisch dar! Wie ändert sich die Flugbahn, wenn man die Rakete mit einem Steigungswinkel von 60° abschießt? Modellierungsannahmen: Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen; die Rakete soll als Punkt betrachtet werden.

Die Aufgabe ist für die Schüler nur bearbeitbar, wenn ihnen die Definitionen von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck bekannt sind. Die x-Komponente wird durch eine gleichförmige Bewegung beschrieben während sich die y-Komponente aus gleichförmiger und gleichförmig-beschleunigter Bewegung (Fallgesetz) zusammensetzt: Steigungswinkel 70°: $x(t) = \cos(70°) \cdot 40 \cdot t,\ y(t) = \sin(70°) \cdot 40 \cdot t - 5 \cdot t^2;\ 0 \leq t \leq 8 \cdot \sin(70°)$.

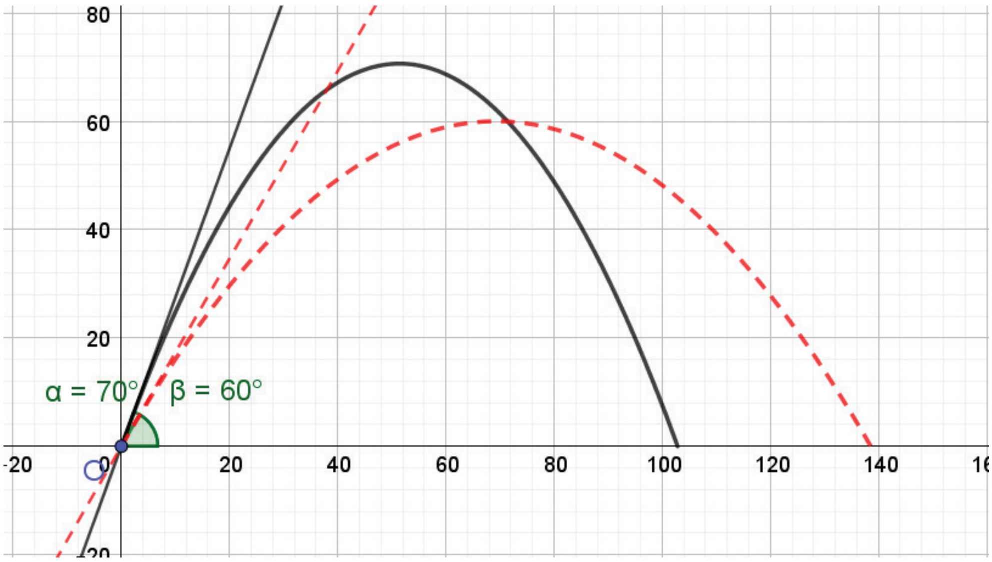


Abb. 56: Feuerwerksrakete

Eine umfangreiche Abhandlung zu Parameterdarstellungen in der Sek I findet man in „Der Mathematikunterricht, Jahrgang 58, Heft 3, März 2012, Friedrich-Verlag".

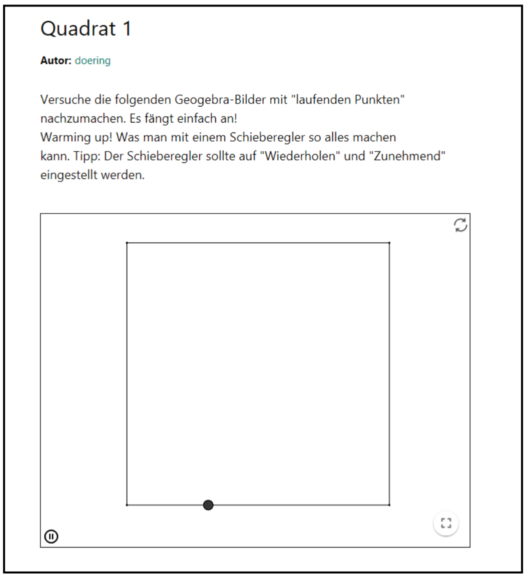
35. Kreativitätstraining

Der Kollege Fabián Vitabar aus Uruguay hat auf dem Geogeba-Gathering 2015 in Linz unter dem Titel „Promoting creative thinking" 2 wunderbare Geogebraaufgabenfelder präsentiert, deren Bearbeitung die Kreativität der Schüler fördern soll. Die erste Aufgabengruppe zur Problemstellung „Laufende Punkte" hängt eng mit dem Thema „Parameterdarstellung und Schieberegler" zusammen. Sie wurde vom Autor erweitert und mehrfach bei projektartigen Unterrichtssequenzen erprobt und wird im Folgenden vorgestellt.

Bei allen Aufgaben sollen die Schüler **nur einen** Schieberegler verwenden! Die Aufgaben werden sukzessiv schwerer und sind nach den Erfahrungen des Autors ausgesprochen trennscharf. Es handelt sich um folgende Aufgaben:

1. Laufender Punkt auf der Quadratunterseite
2. Zwei laufende Punkte auf der Quadratunter- bzw. Quadratoberseite
3. Vier laufende Punkte auf allen Quadratseiten
4. Vier laufende (anscheinend kollidierende) Punkte auf den Quadratdiagonalen
5. Vier laufende Punkte auf dem inneren - um 45° gedrehten - Quadrat
6. Drei laufende Punkte auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks
7. Laufender Punkt auf dem Kreis
8. „Rotierendes" Quadrat im Umkreis
9. Fakultativ: Fünf laufende Punkte auf den Seiten eines regelmäßigen Fünfecks
10. Fakultativ: Zwölf laufende Punkte auf dem Kantenmodell eines Würfels

Bei den folgenden Geogebrabildern sollte der Schieberegler auf „Wiederholen" und „Zunehmend" gestellt werden. Als Geschwindigkeitsstufe bietet sich 3 an, wenn man Quadrate, Dreiecke und Kreise mit der Seiten- bzw. Radiuslänge 1 zeichnet (Ausprobieren!). Das Schöne an dieser Aufgabengruppe ist, dass – nach den Erfahrungen des Autors - alle Schüler Erfolgserlebnisse haben und (genauso wichtig!) dass sich kein Schüler unterfordert fühlt. Falls dies doch der Fall sein sollte, könnte man die Aufgabe um das Problem „Fünf Punkte auf den Seiten eines gleichseitigen Fünfecks" erweitern. Die Aufgabe ist durchaus lösbar, wie die Abbildung 61a auf der nächsten Seite zeigt. Eine spielerische Erweiterung wäre das Problem „Zwölf laufende Punkte auf dem Kantenmodell eines Würfels" (Abb. 61b).



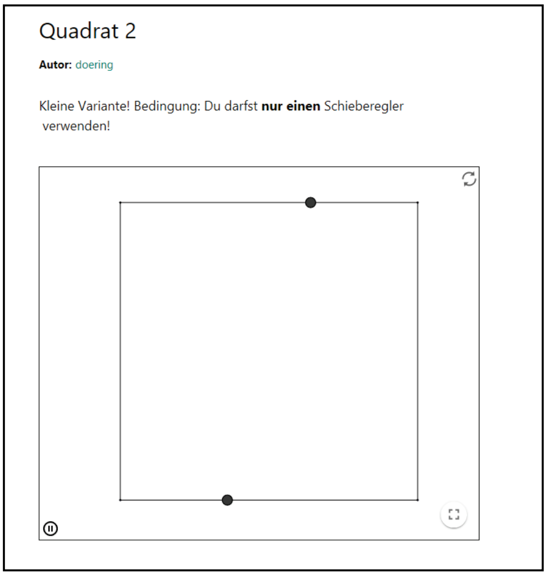
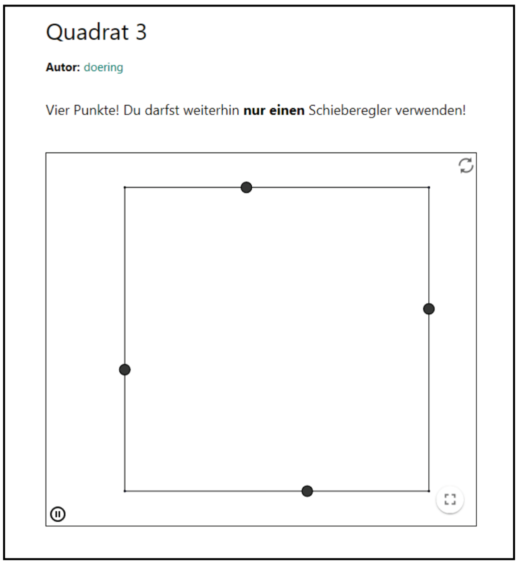


Abb. 57a: Quadrat 1

Abb. 57b: Quadrat 2



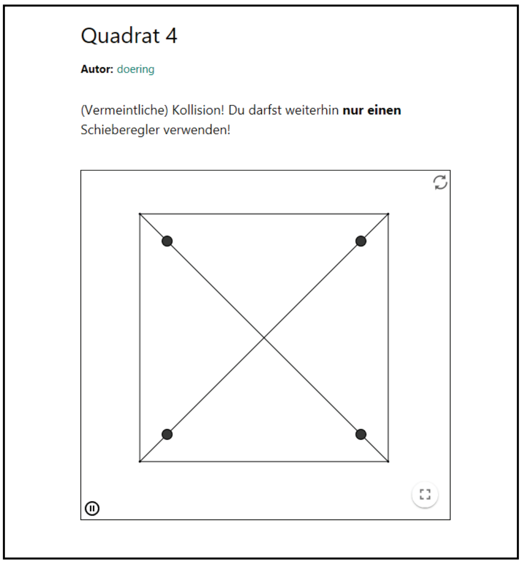


Abb. 58a: Quadrat 3

Abb. 58b: Quadrat 4

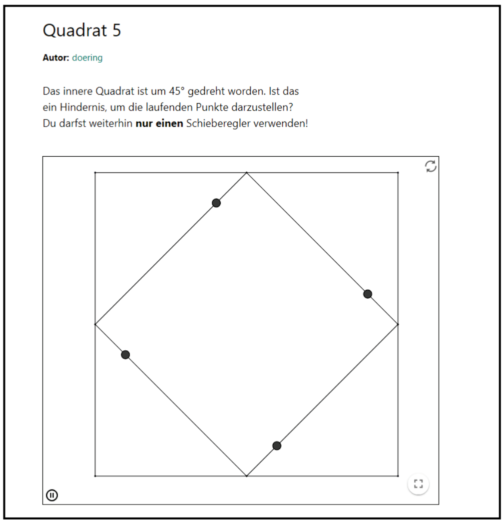


Abb. 59a: Quadrat 5

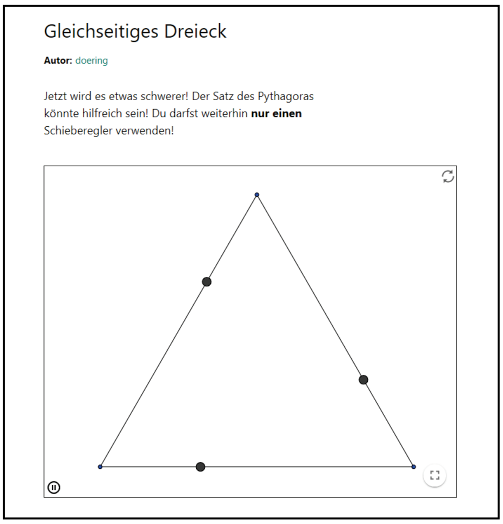


Abb. 59b: Gleichseitiges Dreieck

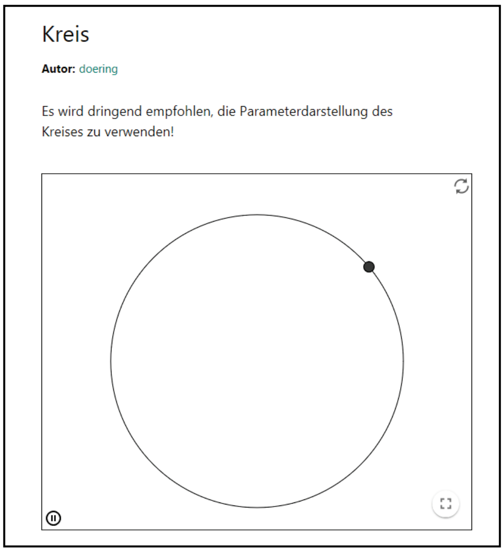


Abb. 60a: Kreis

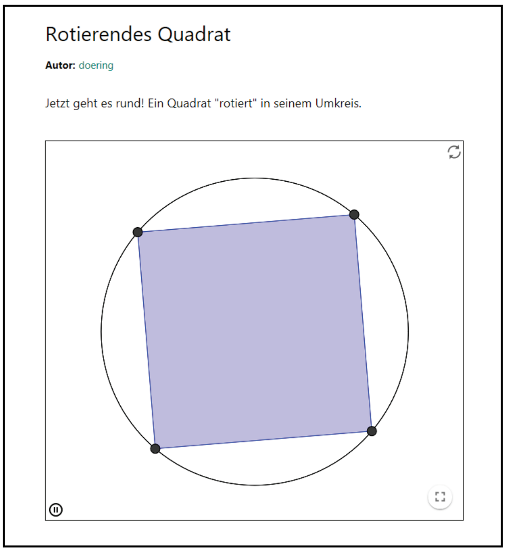


Abb. 60b: Quadrat und Umkreis

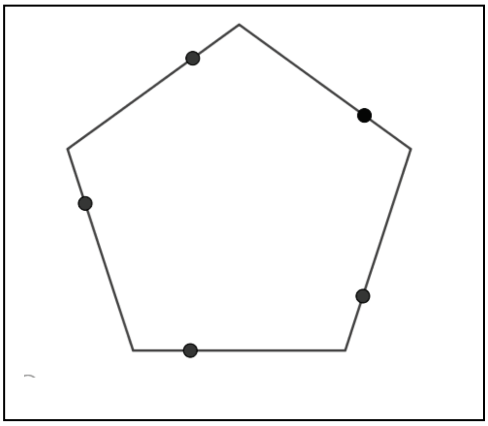


Abb. 61a: Regelmäßiges Fünfeck

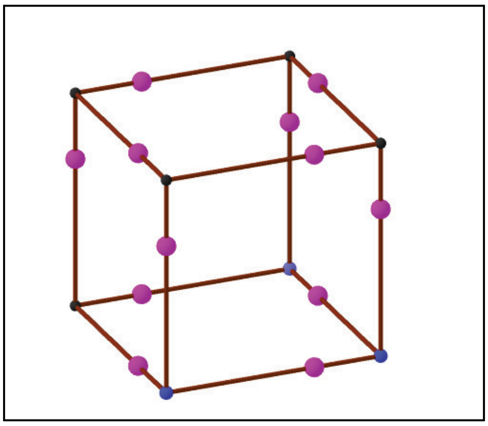


Abb. 61b: Würfel

VIII. Ausgewählte Geogebra-Befehle

Den Befehl Vieleck(…) gibt es in mehreren Varianten. Die wichtigsten sind:

Vieleck(<Punkt>, …, <Punkt>)
Erzeugt ein Vieleck mit den gegebenen Eckpunkten.
Beispiel: Vieleck((0,0), (4,0), (3,2)) erzeugt ein Dreieck.

Vieleck(<Punkt>, <Punkt>, <Anzahl der Ecken>)
Erzeugt ein **regelmäßiges** Vieleck mit n Ecken.
Beispiel: Vieleck((0,0), (4,0), 4) erzeugt ein Quadrat über der Strecke mit den Endpunkten (0/0) und (4/0). Wenn man die Reihenfolge der Punkte vertauscht, weist das Quadrat in die andere Halbebene.

Kreissektor(<Mittelpunkt>, <Anfangspunkt A>, <Punkt B>)
Erzeugt einen Kreissektor mit Mittelpunkt zwischen den beiden Punkten.

Alle 5 platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) können auf analoge Art und Weise erzeugt werden. Dies wird im Folgenden für den Würfel erläutert.

Würfel(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>)
Gibt einen Würfel aus, bei dem die drei (benachbarten) Punkte Eckpunkte der ersten Fläche bilden.

Würfel(<Punkt>, <Punkt>)
Gibt einen Würfel aus, welcher die (automatisch erstellte) Strecke zwischen den zwei gegebenen Punkten als eine Kante hat.

Pyramide(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>, <Punkt>, …)
Erstellt eine Pyramide mit den gegebenen Punkten.
Beispiel:
Pyramide(A,B,C,D) erstellt eine Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze D.

Pyramide(<Vieleck>, <Punkt>)
Erstellt eine Pyramide mit gegebenem Vieleck als Grundfläche und gegebenem Punkt als Spitze.
Beispiel:
Pyramide(Vieleck1, A) erstellt eine Pyramide mit der Grundfläche Vieleck1 und der Spitze A.

Pyramide(<Vieleck>, <Höhe>)
Erstellt eine Pyramide mit dem gegebenen Vieleck als Grundfläche und gegebener Höhe.
Beispiel:
Pyramide(Vieleck1,3) erstellt eine Pyramide mit der Grundfläche Vieleck1 und der Höhe 3.

Drehe(<Objekt>, <Winkel>, <Punkt>)
Dreht das geometrische Objekt um den gegebenen Winkel um den gegebenen Punkt.

Verschiebe(<Objekt>, <Vektor>)
Verschiebt geometrische Objekte um den Vektor.

Folge(<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert a>, <Endwert b>)

Erzeugt eine Folge von Objekten basierend auf dem gegebenen Ausdruck, wobei die Variable von Startwert *a* bis Endwert *b* läuft. Die Schrittweite beträgt dabei 1. Die Folge wird als Liste dargestellt.

Beispiel: Folge(x+n, n, -3, 3) erzeugt eine Liste von Funktionstermen {x-3, x-2, …, x+3}. Die Parallelenschar wird automatisch im Graphikfenster dargestellt.

Folge(<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert a>, <Endwert b>, <Schrittweite>)

Erzeugt eine Folge von Objekten basierend auf dem gegebenen Ausdruck, wobei die Variable von Startwert *a* bis Endwert *b* mit gegebener Schrittweite läuft.

Beispiel: Folge(x+n, n, -3, 3, 0.5) erzeugt eine Liste von Funktionstermen {x-3, x-2.5, …, x+2.5, x+3}. Die Parallelenschar wird automatisch im Graphikfenster dargestellt.

Zufallszahl(<Minimalwert>, <Maximalwert>)

erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall [Minimalwert; Maximalwert].
Beispiele: Folge(Zufallszahl(0,1),n,1,10) erzeugt z. B. eine Liste {1,0,0,1,0,1,0,1,0,1}.
Folge(Zufallszahl(1,6),n,1,10) erzeugt z. B. eine Liste {3,4,3,3,2,4,1,2,4,6}.

MatrixAnwenden(<Matrix>, <Objekt>)

Beispiel 1: Es sei m1 eine 2 x 2 Matrix (m1=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) und u ein Vektor (u=$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$). Mit der Eingabe MatrixAnwenden(m1, u) erhält man den Bildvektor u‘=$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2: Es sei m1 eine 2 x 2 Matrix (m1=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) und P ein Punkt (P=(2,1)). Mit der Eingabe MatrixAnwenden(m1, P) erhält man den Bildpunkt P‘=(-2,1).
Der Befehl lässt sich auch auf andere geometrische Objekte wie Vielecke, Kreise, usw. anwenden.

TrendPoly(<Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms>)

Berechnet das Regressionspolynom *n*-ten Grades.

Beispiel: TrendPoly({(-1, -1), (0, 1), (1, 1), (2, 5)},3) berechnet $x^3 - x^2 + 1$.

Kurve(<Ausdruck>, <Ausdruck>, <Parameter>, <Startwert>, <Endwert>)

Erzeugt die kartesische Parameterkurve für den gegebenen *x*-Ausdruck (erster <Ausdruck>) und den *y*-Ausdruck (zweiter <Ausdruck>) mit dem gegebenen Parameter im Intervall [Startwert, Endwert].

Beispiel: Kurve(2cos(t), 2sin(t), t, 0, 2pi) erzeugt einen Kreis mit dem Radius *2* um den Koordinatenursprung.

Anmerkungen: Der Endwert muss größer oder gleich dem Startwert sein und beide Werte müssen endlich sein. *x* darf nicht als Parameter verwendet werden.

Links zu den Geogebra-Arbeitsblättern

Arbeitsblätter zur Geogebra-handreichung in der Sek I
https://ggbm.at/mdjc54hf

Geogebra-Lernumgebung Parabeln
https://ggbm.at/uhuzpwdw

Geogebra-Lernumgebung Sinusfunktionen
https://ggbm.at/tkesqkcd

Kreativitätstraining
https://ggbm.at/x8qvc25n

Senatsverwaltung
für Bildung, Jugend
und Familie

Berlin

Bernhard-Weiß-Straße 6
10178 Berlin
Telefon (030) 90227-5050
www.berlin.de/sen/bjf
post@senbjf.berlin.de