Berlin
Senatsverwaltung für
Bildung, Jugend und Sport

Unterrichtsentwicklung

MATHEMATIK
SEKUNDARSTUFE I

Aufgaben zur Illustration der
KMK-Bildungsstandards
für den mittleren Schulabschluss

Zweite, überarbeitete Auflage

Jana Risse
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Herausgeber:
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport
Beuthstraße 6-8
10117 Berlin

Verantwortlich:
Tom Stryck
Referat I D: Schul- und Qualitätsentwicklung,
Schulforschung, Fort- und Weiterbildung

Autorin:
Jana Risse
Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
risse@mathematik.hu-berlin.de

Redaktion und Ansprechpartner:
Christian Bänsch, SenBJS I D 7
christian.baensch@senbjs.verwalt-berlin.de

2. überarbeitete Auflage
Berlin, März 2006

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport

Berlin

Mathematik Sekundarstufe I

Aufgaben zur Illustration der KMK-Bildungsstandards
für den mittleren Schulabschluss

Zweite, überarbeitete Auflage 2006

Jana Risse

Humboldt-Universität zu Berlin

Institut für Mathematik

Ansprechpartner in der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport:
Christian Bänsch, I D 7
christian.baensch@senbjs.verwalt-berlin.de

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

die Unterstützung der Humboldt-Universität zu Berlin macht es möglich, diese Broschüre in einer zweiten, korrigierten und verbesserten Auflage herauszugeben. Ich bedanke mich bei allen Kolleginnen und Kollegen für Hinweise, Anregungen und Verbesserungsvorschläge zu der 1. Auflage und für die Humboldt-Universität zu Berlin für die Chance, diese Rückmeldungen einzuarbeiten und Ihnen die Broschüre erneut zur Verfügung zu stellen.

Sie besteht aus einer Materialsammlung, die Frau Jana Risse, Promotionsstudentin und wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Humboldt-Universität zu Berlin erstellt hat. Sie illustriert an ausführlich erläuterten, kompetenzorientierten Aufgabenbeispielen die Intentionen und Chancen der am 4. 12. 2003 beschlossenen Bildungsstandards der KMK (Kultusministerkonferenz) für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik, die an alle Schulen versandt wurden. An diesen Standards orientieren sich die bisherigen Vergleichsarbeiten und die zukünftigen schriftlichen Prüfungsarbeiten zum mittleren Schulabschluss in Berlin.

Veränderungen im Mathematikunterricht brauchen Zeit, um nach innen wirken zu können und nach außen hin sichtbar zu werden. Die Broschüre will dazu einen Beitrag leisten und Impulse für Ihre tägliche Arbeit geben. Viele Ideen, insbesondere aus dem Modul 1 des BLK-Programms SINUS-Transfer werden hier aufgegriffen. Die Fachkonferenz Mathematik Ihrer Schule sollte sich mit dieser Broschüre befassen. Wir bitten die Fachkonferenzleiter, sie den Kolleginnen und Kollegen zur Verfügung zu stellen.

Das Material geht ausführlich auf den Kompetenzbezug der einzelnen Aufgaben ein. Es bietet dadurch Beispiele für kompetenzbezogene Aufgabenanalysen und gibt Anhaltspunkte für die weitere Aufgabenauswahl für Ihren Unterricht. Die Neuorientierung des Mathematikunterrichts erfordert neue, ergänzende Aufgabenformate, die über Rechenübungen hinausgehen. Außerdem ist eine veränderte methodische Herangehensweise nötig, die den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht mehr Gelegenheiten gibt, eigene Lösungswege zu entdecken, über Mathematik zu sprechen und sich über verschiedene Lösungswege auszutauschen. Weitere Anregungen hierzu finden Sie auf der Homepage des BLK-Programms SINUS-Transfer: www.sinus-transfer.de .

Ich hoffe, dass diese Broschüre einerseits für Sie eine Hilfe ist, Ihren Unterricht in diese Richtung weiter zu entwickeln und Ihnen andererseits auch hilft, Ihre Schülerinnen und Schüler auf Vergleichsuntersuchungen und die zentrale Prüfung zum mittleren Schulabschluss vorzubereiten.

Christian Bänsch

Mathematik Sekundarstufe I

Aufgaben zur Illustration der KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss

Jana Risse, Humboldt-Universität zu Berlin

Zweite, überarbeitete Auflage 2006

Inhaltsverzeichnis

Umsetzung der Bildungsstandards durch mathematische Aufgaben

Struktur der Bildungsstandards für das Fach Mathematik

Als eine Antwort auf die Ergebnisse deutscher Schüler bei internationalen Schulleistungsvergleichsstudien wurden im Rahmen von Maßnahmen zur Qualitätsentwicklung und -sicherung von der Kultusministerkonferenz Bildungsstandards entwickelt[1].

Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik legen in prozessbezogenen Standards fest, in welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzbereichen (K1 bis K6) die Schüler bis zum Abschluss ihrer Schulbildung Kompetenzen erworben haben sollen (KMK 2004a).

Allgemeine mathematischen Kompetenzen werden stets in der Auseinandersetzung mit konkreten mathematischen Inhalten erworben. Deshalb werden inhaltsbezogene Kompetenzen unter fünf mathematischen Leitideen (L1 bis L5) aufgeführt.

Um Aufgaben nach ihren Anforderungen bezüglich bestimmter mathematischer Kompetenzen einstufen und auswählen zu können, aber auch um die von den Schülern nachgewiesenen Kompetenzen einzuordnen, werden drei Anforderungsbereiche unterschieden (KMK 2004b):

(AB I) Reproduzieren: Wiedergabe und direkte Anwendung grundlegender Begriffe, Sätze, Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang

(AB II) Zusammenhänge herstellen: Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden

(AB III) Verallgemeinern und Reflektieren: Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen und Wertungen zu gelangen

Die Unterteilung in diese drei Dimensionen wurde bereits in den Vergleichsarbeiten Mathematik für die 10. Jahrgangsstufe benutzt.

Übersicht:

<table>
<tr><th colspan="3">Allgemeine mathematische Kompetenzen</th><th colspan="2">Mathematische Leitideen</th></tr>
<tr><td colspan="3">K1 Mathematisch argumentieren</td><td colspan="2">L1 Zahl</td></tr>
<tr><td colspan="3">K2 Probleme mathematisch lösen</td><td colspan="2">L2 Messen</td></tr>
<tr><td colspan="3">K3 Mathematisch modellieren</td><td colspan="2">L3 Raum und Form</td></tr>
<tr><td colspan="3">K4 Mathematische Darstellungen verwenden</td><td colspan="2">L4 Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="3">K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen</td><td colspan="2" rowspan="2">L5 Daten und Zufall</td></tr>
<tr><td colspan="3">K6 Kommunizieren</td></tr>
<tr><td>Anforderungs-bereiche</td><td>(AB I) Reproduzieren</td><td colspan="2">(AB II) Zusammenhänge herstellen</td><td>(AB III) Verallgemeinern und Reflektieren</td></tr>
</table>

Die in den Bildungsstandards festgehaltenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und Leitideen bilden eine wesentliche Grundlage des neuen Berliner Rahmenlehrplans für die Sekundarstufe I.

[1] Für das Fach Mathematik wurden Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss im Dezember 2003 und für den Hauptschulabschluss im Oktober 2004 von der KMK beschlossen.

Die Rolle von Aufgaben bei der Förderung mathematischer Kompetenzen

> „Unter pädagogischer Perspektive sind Aufgaben als die zentralen Elemente des Mathematikunterrichtes anzusehen, die sowohl die Schüler- wie die Lehrertätigkeit determinieren.“ (Neubrand 2002, S. 4)

Durch Aufgaben werden die Aktivitäten der Schüler im Mathematikunterricht angeregt und organisiert. Werden die Schüleraktivitäten erfolgreich ausgeführt, unterstützen sie das Erreichen lokaler (z. B. Aneignung eines bestimmten Begriffs, eines bestimmten Verfahrens) und globaler Lernziele (z. B. Entwicklung allgemeiner Fähigkeiten und Einstellungen).

In der Mathematikdidaktik herrscht Einigkeit darüber, dass die Schüler mit bedeutungsvollen mathematischen Aufgaben konfrontiert werden sollen (z. B. Stein, Grover, Hennigsen 1996). Es geht um Aufgaben, die für die Schüler wirklich problemhaltig sind und nicht einfach ein verkleideter Weg, um einen bereits demonstrierten Algorithmus zu üben. Bei der Bearbeitung solcher Aufgaben wird es für die Schüler notwendig, mathematische Begriffe und Strukturen zu nutzen, Entscheidungen zu treffen (Was ist zu tun? Wie ist es zu tun?) und ihre Lösungen wirklichkeitsnah zu interpretieren. Solche Aufgaben sind charakterisiert durch die Möglichkeit mehrerer Lösungsstrategien, die Möglichkeit verschiedener Darstellungsweisen und die Anforderung, dass die Schüler über ihr Vorgehen und ihr Verständnis kommunizieren und argumentieren.

Mathematische Aufgaben werden bei Neubrand (2002, S. 2) auch als wesentliches Element der inhaltlichen Strukturierung des Unterrichts gesehen. Der mathematische Inhalt im engeren Sinne („Was wird in den Unterricht aufgenommen?“) wird ergänzt durch Fragen nach der Art, Tiefe, Vielfalt, Vernetzung der Inhalte („Wie, unter welchen Bedingungen und mit welchen Beziehungen wird etwas in den Unterricht aufgenommen? Welche Aufgaben werden zu diesem Zweck gestellt?“). Aufgaben, mit denen sich Schüler beschäftigen, bestimmen nicht nur, welche Stoffe sie lernen, sondern auch, wie sie über Entwicklung, Anwendung und Verständnis von Mathematik denken (Stein, Grover, Hennigsen 1996).

In Zusammenhang mit den Bildungsstandards haben mathematische Aufgaben zwei wesentliche Funktionen. Zum einen sollen anhand bedeutungshaltiger Aufgaben mathematische Kompetenzen erworben und weiterentwickelt werden. Zum anderen können die Schüler bei der Bearbeitung geeigneter Aufgaben bereits erworbene Kompetenzen darlegen. Für den Lehrer ergibt sich dann die Möglichkeit, die Kompetenzen der Schüler zu analysieren und die Ergebnisse in die Planung und Gestaltung des zukünftigen Unterrichts einfließen zu lassen (Funktion der Diagnose und Rückmeldung).

Aufbau dieser Broschüre

In dieser Broschüre wurden elf Aufgaben zusammengestellt, um die Umsetzung der Bildungsstandards im Fach Mathematik an den Berliner Schulen zu unterstützen.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben werden die in den Bildungsstandards geforderten allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit wichtigen Inhalten der Sekundarstufe I verbunden. Zugänge und Lösungsmöglichkeiten sind auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus möglich, wodurch die Aufgaben in allen Schulformen einsetzbar sind. Durch geringfügige Modifikationen (z. B. Weglassen einer Teilaufgabe, Angabe zusätzlicher Informationen) können die Aufgaben weiter an die konkrete Unterrichtssituation angepasst werden.

Die Aufgaben können zum einen in verschiedene Unterrichtsthemen der Jahrgangsstufen 7/8 und 9/10 eingegliedert werden. Sie bieten durch die Gewichtung allgemeiner Kompetenzen andererseits aber auch die Möglichkeit, losgelöst von einem speziellen Thema, z. B. als immanente Wiederholung, in den Unterricht einzufließen.

Alle Aufgaben können von den Schülern in selbständiger Arbeit, auch zu Hause, aber auch in Partner- und Gruppenarbeit gelöst werden. Die Aufgaben sind komplex, sowohl in inhaltlicher Hinsicht als auch bezüglich der vielseitigen, teilweise (noch) ungewohnten mathematischen Aktivitäten. Deshalb wird eine gemeinsame Reflexion unterschiedlicher Zugänge, Lösungswege und Ergebnisse für wichtig gehalten. Dabei bekommen einerseits die Schüler Rückmeldungen über ihre Kompetenzen. Andererseits werden Kompetenzen wie das Argumentieren und Kommunizieren besonders angesprochen. Schließlich sollen bei einer solchen Reflexion die Schüler ihre eigenen Arbeiten selbstkritisch betrachten und von anderen lernen.

Zu jeder Aufgabe werden zunächst die wichtigsten Daten zur Orientierung und Einordnung angegeben: empfohlene Jahrgangsstufen, einbezogene Leitideen und Kompetenzen, angesprochene mathematische Inhalte.

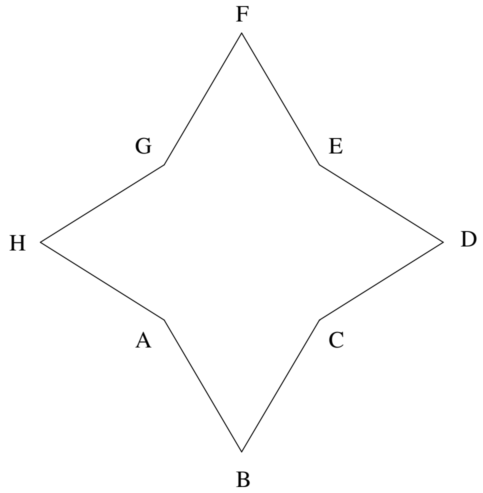
Der Aufgabenstellung folgt ein ausführliches Lösungsbeispiel. Hierzu muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass es sich überwiegend um eine mögliche Lösung handelt, alle Aufgaben aber bezüglich des Lösungsweges offen sind. Dieses Lösungsbeispiel orientiert sich inhaltlich und in Bezug auf die allgemeinen Fähigkeiten an den angegebenen Jahrgangsstufen. Soll daraus ein Erwartungshorizont entwickelt werden, ist die Schulform sowie die spezielle Klassen- und Unterrichtssituation zu berücksichtigen.

Anschließend werden für jede Aufgabe die wesentlichen mathematischen Kompetenzen bezüglich Umfang und Anforderung an die Schüler erläutert. Dieser Abschnitt verdeutlicht, inwiefern die Aufgabe zur Umsetzung der Bildungsstandards und des neuen Berliner Rahmenlehrplans beitragen kann. Ob dies von den Schülern auch umgesetzt wird, kann erst eine Analyse der Schülerprodukte selbst aufdecken.

Unter der Überschrift „Gedanken zur Umsetzung im Unterricht“ werden einige Ideen skizziert, wie die Aufgabe in den Unterricht einfließen kann, aber auch mögliche Problemfelder und Rahmenbedingungen benannt.

1. Vom Stern zur Pyramide

Der nebenstehende Stern hat folgende Eigenschaften: Alle Seiten sowie die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ und $\overline{GA}$ haben die gleiche Länge a, $\overline{GA}$ und $\overline{CE}$ stehen senkrecht auf $\overline{AC}$.



a) Wie viele Symmetrieachsen hat der Stern?

b) Konstruiere den Stern für $a = 5$ cm und beschreibe deine Konstruktion.

c) Werden die Dreiecksflächen des Sterns nach oben geklappt, entsteht eine Pyramide.
Unter welcher Bedingung kann so auch dann noch eine Pyramide entstehen, wenn die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ nicht mehr gleich lang sind, aber die Symmetrie des Sterns erhalten bleibt?

Quelle	Modifikation der gleichnamigen Aufgabe aus den kommentierten Aufgabenbeispielen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. www.kmk.org, 2004 , S. 23
Jahrgangsstufen	7/8 (P4 7/8, W3 7/8)
Leitidee	Raum und Form
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematische Darstellungen verwenden, kommunizieren, Probleme mathematisch lösen
Angesprochene mathematische Inhalte	Symmetrieachse, Konstruktion von Quadrat und gleichseitigem Dreieck, Pyramide (anschaulich)

Zu 1. Vom Stern zur Pyramide

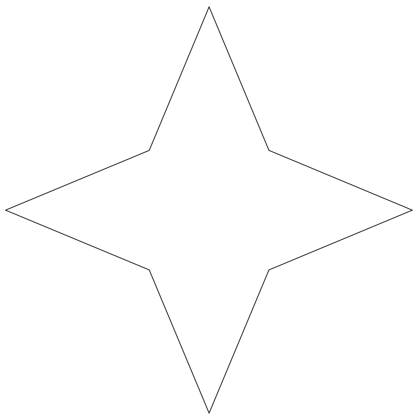
Möglicher Lösungsweg

a) Es gibt vier Symmetrieachsen: *AE*, *GC*, *BF*, *HD*.

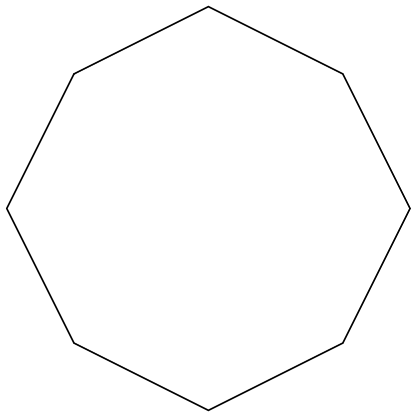
b) Konstruktion[2]:

- Konstruktion des Quadrates *ACEG*[3]
- Konstruktion der vier gleichseitigen Dreiecke z. B. nach dem Kongruenzsatz sss

c) $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ sind nicht mehr gleich lang:



Beispiel 1: Pyramidennetz



Beispiel 2: kein Pyramidennetz

Wie die Beispiele zeigen, muss $\overline{AB}$ eine Mindestlänge haben, damit durch Zusammenklappen eine Pyramide entstehen kann. Die Schenkellängen der Dreiecke müssen größer sein als die Hälfte der Diagonalen des Quadrats.

[2] Die fertige Konstruktion entspricht der Zeichnung in der Aufgabenstellung mit Seitenmaß 5 cm.

[3] Es sollte angestrebt werden, dass die Schüler das Quadrat mit Zirkel und Lineal durch Errichten von Senkrechten konstruieren.

Zu 1. Vom Stern zur Pyramide

Förderung allgemeiner Kompetenzen

Mathematische Darstellungen verwenden

Den Schülern wird die Aufgabe gestellt, eine zusammengesetzte Figur zu konstruieren. Grundlage bildet eine Skizze der Figur und eine verbale Beschreibung ihrer Eigenschaften. Es wird nicht benannt, welche den Schülern bekannte Konstruktionen als Teile der gesamten Konstruktion verwendet werden können. Von den Schülern ist zu erkennen, dass $ACEG$ ein Quadrat ist. An die Seiten dieser Hilfskonstruktion können dann auf unterschiedlichen Wegen vier gleichseitige Dreiecke konstruiert werden. Zur Ausführung der Konstruktion sind heuristische Kompetenzen erforderlich und Zusammenhänge herzustellen (Anforderungsbereich II).

K6 Kommunizieren

Bei der Beschreibung der von den Schülern ausgeführten Konstruktion kommen zwei Kompetenzen zum Tragen: das verständliche Darlegen der Gedankengänge und Konstruktionsschritte sowie die angemessene und korrekte Verwendung der mathematischen Fachsprache.

In c) ist das Ergebnis einer Analyse der gegebenen Figur zu präsentieren. Bei der Erkundung der Bedingung für eine Pyramide haben die Schüler (z. B. durch reale oder gedankliche Experimente) eine Forderung an die Beziehung zwischen den Schenkellängen der gleichschenkligen Dreiecke und der Länge der Diagonale des inneren Quadrats herausgefunden[4]. Diese ist nun einleuchtend darzustellen. Durch Beispiel und Gegenbeispiel kann die notwendige Bedingung zur Errichtung der Pyramide sehr gut veranschaulicht werden. Eine verbale Beschreibung ergänzt dies. So wird plausibel dargestellt, dass es beide Möglichkeiten gibt und wodurch sie sich unterscheiden.

Schließlich ist es auch eine Kompetenz des Kommunizierens, aus mathematikhaltigen Texten, Graphiken und Abbildungen Informationen zu entnehmen. Die Informationsquelle ist hier der Eingangstext, welcher die Daten zur Bearbeitung aller Teilaufgaben liefert.

Die genannten Aktivitäten des Kommunizierens entsprechen dem Anforderungsbereich II.

K2 Probleme mathematisch lösen

Bei allen drei Teilaufgaben haben die Schüler heuristische Aktivitäten auszuführen und Zusammenhänge zwischen bekannten mathematischen Elementen herzustellen:

a) Analyse der gegebenen Figur hinsichtlich ihrer Symmetrieachsen, Anwenden bekannter Begriffe auf neue Situationen, Prüfen von Bedingungen

b) Zerlegen der Figur in geometrische Objekte, deren Konstruktion bekannt ist

c) Analyse der Auswirkungen von Veränderungen der gegebenen Figur durch reale oder gedankliche Experimente, Erkunden von Bedingungen

[4] Hier können auch andere für die Errichtung einer Pyramide notwendige Bedingungen formuliert werden, z.B. eine Beziehung zwischen der Höhe der gleichschenkligen Dreiecke und der halben Quadratseite.

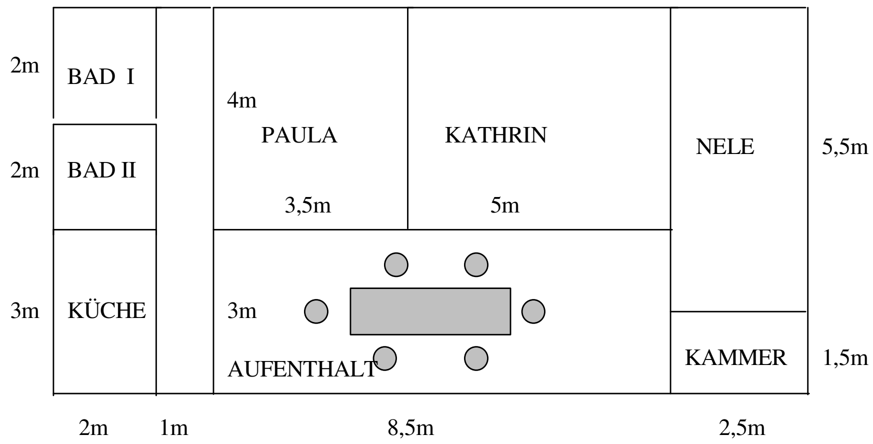
Erkennen die Schüler, dass die Figur aus einem Quadrat und vier gleichseitigen Dreiecken besteht, ist der wichtigste Schritt bereits getan. Dazu ist es notwendig, die verbale Beschreibung der Figur in Zusammenhang mit der Skizze zu interpretieren.

Die heuristischen Anforderungen entsprechen dem Bereich II.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Bei der Reflexion sollten unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten gewürdigt, vorgestellt und diskutiert werden. So wird deutlich, dass nicht die (eine) richtige Konstruktion zu suchen ist, sondern dass die Schüler durch eigene Überlegungen einen Konstruktionsweg finden können.
- Wie lang die Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke sein dürfen, damit noch eine Pyramide entsteht, kann sehr anschaulich durch echte Handlungen der Schüler untersucht werden. Die Schüler können Sterne mit verschiedenen Schenkellängen ausschneiden und versuchen durch Falten Pyramiden zu erstellen. Beispiele und Gegenbeispiele können dann direkt am Objekt analysiert werden. Die Ergebnisse der Handlungen sind schließlich verbal oder formal in die Sprache der Mathematik zu übertragen.
- Wird die Aufgabe erweitert, kann sie auch für die Jahrgangsstufen 9/10 anspruchsvoll sein. Höhe, Volumen und Oberfläche der Pyramide können dann von den Schülern berechnet werden (vgl. KMK 2004b, S. 23).
- Weitere Differenzierungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn die Aufgabe in der offenen, von der KMK (2004b, S. 23) vorgeschlagenen Form thematisiert wird. *ACEG* muss dann kein Quadrat mehr sein und dennoch kann die Figur achsensymmetrisch zu *GC* sein.

2. Ein Zimmer für Studentinnen



Wandhöhe 2,5m

Längenangaben entsprechen Abständen zwischen den beiden nächstgelegenen Wänden

Die Studentinnen Paula, Kathrin und Nele haben diese Wohnung gemietet. Sie zahlen insgesamt 520 Euro Kaltmiete. Die Studentinnen wollen diese Kosten nun so aufteilen, dass der Beitrag jeder Studentin der Größe ihres Zimmers angemessen ist.

a) Stelle einen solchen Mietplan auf. Unter welchen Bedingungen ist dein Mietplan gerecht?

b) Wann wäre dein Mietplan nicht gerecht? Wie könnte in diesem Fall die Miete aufgeteilt werden?

c) Welche monatlichen Kosten kommen neben der Kaltmiete noch auf die Studentinnen zu? Formuliere die vorliegenden Zusammenhänge. Sind sie proportional?

Jahrgangsstufen	7/8 (P10 7/8)
Leitidee	Funktionaler Zusammenhang, Messen
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematisch argumentieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, kommunizieren, mathematisch modellieren
Angesprochene mathematische Inhalte	Proportionalität, Flächenberechnung (Rechtecke), ggf. Prozentrechnung

Zu 2. Ein Zimmer für Studentinnen

Möglicher Lösungsweg

a) Mietplan I

Der Mietpreis ist der Zimmergröße angemessen, wenn ein direkt-proportionaler Zusammenhang zwischen der Grundfläche des Zimmers und dem monatlichen Mietbetrag gewählt wird. Dafür werden zunächst die Flächen der Zimmer der Studentinnen bestimmt.

Paula: 14 m^2, Kathrin: 20 m^2, Nele: 13,75 m^2

Zusammen haben die drei Zimmer eine Fläche von 47,75 m^2.

Der Proportionalitätsfaktor entspricht hier dem Mietpreis pro Quadratmeter eines Zimmers:

$$\frac{520 \text{ Euro}}{47{,}75 \text{ m}^2} = 10{,}89 \frac{\text{Euro}}{\text{m}^2}$$

Daraus ergibt sich folgender Mietplan:

Name	Zimmerfläche	Mietpreis
Paula	14 m^2	152 Euro
Kathrin	20 m^2	218 Euro
Nele	13,75 m^2	150 Euro

Probe: 152 Euro + 218 Euro + 150 Euro = 520 Euro

Dieser Mietplan berücksichtigt nur die drei Zimmer der Frauen, nicht die gemeinsam genutzten Räume. Er ist nur dann gerecht, wenn die weiteren Räume auch im Verhältnis der Zimmergrößen genutzt werden. Kathrin müsste dann die von allen genutzten Räume etwa 1,5 mal so stark nutzen wie Paula und Nele. Dies könnte sein, wenn Kathrin am häufigsten in der WG ist, die anderen dagegen z. B. öfter mal zu ihren Eltern fahren.

Dieser Mietplan wäre auch dann ein Stück gerechter, wenn Kathrin ein Bad allein nutzt und sich Paula und Nele ein Bad teilen. Eine solche feste Zuordnung der Bäder scheint ohnehin sinnvoll.

b) Mietplan II

Wird davon ausgegangen, dass die drei Studentinnen die gemeinschaftlichen Räume ungefähr gleichstark nutzen, ist ein anderer Ansatz gerechter. Die Fläche der gemeinschaftlich genutzten Räume wird gedrittelt und zu den Zimmerflächen addiert. Die so entstandene Fläche könnte „Nutzfläche“ genannt werden. Der Proportionalitätsfaktor für diesen Ansatz entspricht den Mietkosten pro Quadratmeter bezogen auf die Gesamtfläche der WG:

$$\frac{520 \text{ Euro}}{98 \text{ m}^2} = 5{,}31 \frac{\text{Euro}}{\text{m}^2}$$

Damit ergibt sich der folgende Mietplan:

Name	Nutzfläche	Mietpreis
Paula	30,75 m^2	163 Euro
Kathrin	36,75 m^2	195 Euro
Nele	30,50 m^2	162 Euro

c) Weitere monatliche Kosten

Wasser: Der Preis für Wasser und Abwasser wird zunächst für proportional zur Menge des verbrauchten Wassers gehalten. Ein Kubikmeter Wasser (einschließlich Abwasser) kostet in Berlin ca. 5 Euro[5].

Kommen dazu aber noch Grundkosten, Servicegebühren und Mietkosten für den Kaltwasserzähler, liegt kein proportionaler Zusammenhang zwischen Verbrauch und Kosten mehr vor.

Gas bzw. Heizkosten: Für Erdgas können beim Anbieter ähnlich wie bei Telefonanbietern unterschiedliche Tarife[6] gewählt werden. Diese setzen sich aus einem Grundpreis pro Monat und einem Arbeitspreis pro Kilowattstunde zusammen. Ein Beispiel wäre ein monatlicher Grundpreis von 24,36 Euro (inklusive der gesetzlichen Umsatzsteuer von 16 %) und ein Arbeitspreis von 4,872 Cent pro Kilowattstunde (inklusive Mineralölsteuer und Konzessionsabgabe). Aufgrund des Grundpreises liegt kein proportionaler Zusammenhang vor.

Strom: Auch der Strompreis setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen[7]:

- Verbrauchspreis 12,77 Cent/kWh (Der Verbrauch wird aus dem Zählerstand ermittelt.),
- Grundpreis 47,40 Euro/Jahr,
- Stromsteuer 2,05 Cent/kWh,
- Umsatzsteuer 16%.

Der Grundpreis ist nicht proportional zum „Verbrauch“ (elektrische Arbeit), sondern zur Anzahl der Tage im Abrechnungszeitraum. Deshalb ergibt sich für den Gesamtpreis des Stromes keine direkte Proportionalität zum „Verbrauch“.

Betriebskosten: Zu den Betriebskosten eines Mietshauses gehören z. B. Kosten für Hausreinigung, Hausbeleuchtung/Strom, Straßenreinigung/Schneebeseitigung, Müllabfuhr, Hausmeister, Außenanlagen, Grundsteuer. Diese Kosten fallen für das gesamte Haus an, nicht für eine Wohnung. Der Gesamtpreis wird auf alle Mietparteien umgelegt. Für die einzelnen Teile der Betriebskosten gibt es unterschiedliche Abhängigkeiten. So werden die Kosten für die Hausbeleuchtung vom genutzten Strom abhängen. Die Grundsteuer ist dagegen ein konstanter Betrag.

[5] Genaue und aktuelle Tarife können beispielsweise der Internetseite der Berliner Wasserbetriebe entnommen werden.

[6] Genaue und aktuelle Tarife können beispielsweise der Internetseite der GASAG entnommen werden.

[7] Diese Daten wurden einer Schlussrechnung der Bewag für 2004 entnommen.

Zu 2. Ein Zimmer für Studentinnen

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K1 Mathematisch argumentieren

Die Schüler werden aufgefordert zu analysieren und zu argumentieren, unter welchen Bedingungen der erstellte Mietplan gerecht ist. Bei der Begründung können sowohl mathematische als auch nicht-mathematische Argumente eine Rolle spielen. Aus einer Analyse des Mietplanes sollten folgerichtig Schlüsse für dessen Eignung gezogen werden. Erwartet werden überwiegend verbale Argumentationen, eventuell mit formalen Untermauerungen wie z. B. einer Proberechnung. Wann der Mietplan gerecht oder nicht gerecht ist, kann auch anschaulich durch die Beschreibung von Beispielfällen plausibel gemacht werden.

Aus den Fällen für die der Mietplan nicht gerecht ist ziehen die Schüler (begründete) Schlussfolgerungen für einen alternativen Ansatz.

Es handelt sich hierbei um überschaubare mehrschrittige Argumentationen (Anforderungsbereich II). Innerhalb der individuellen Aufgabenbearbeitung können jedoch weitere Begründungen oder sogar Bewertungen auftreten, die anderen Anforderungsbereichen entsprechen.

K5 Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die auszuführenden Berechnungen (Flächenberechnungen, Berechnungen eines Proportionalitätsfaktors etc.) sind für Schüler der siebenten und achten Klasse Routineanforderungen (Anforderungsbereich I). Die Multiplikation von Dezimalzahlen, einschließlich einer notwendigen Rundung des Ergebnisses, entspricht einer sachimmanenten Wiederholung von Inhalten des Grundschulunterrichts. Zu diesen Rechnungen kann der Taschenrechner als mathematisches Werkzeug eingesetzt werden.

K6 Kommunizieren

Bereits bei der selbständigen schriftlichen Lösung und Darstellung der Bearbeitung dieser Anwendungsaufgabe sind eine Reihe von Kompetenzen des Kommunizierens erforderlich:

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse verständlich darstellen
- Beschreiben von Zusammenhängen zwischen Größen, verbal oder formal
- Informationen aus Zeichnungen, Tabellen, Graphiken etc. entnehmen

Bei einer Bearbeitung in Gruppen oder bei einer gemeinsamen Reflexion werden weitere kommunikative Aktivitäten auftreten, wie z. B.:

- auf Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten eingehen
- mit Fehlern konstruktiv umgehen
- Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten bewerten
- Präsentieren des Lösungsweges unter Verwendung von Präsentationsmitteln

Das Spektrum möglicher kommunikativer Aktivitäten erstreckt sich über alle drei Anforderungsbereiche.

K3 Mathematisch modellieren

Diese Anwendungsaufgabe spricht in ihren Teilaufgaben wichtige Aktivitäten des mathematischen Modellierens an. Das zugrundeliegende mathematische Modell ist der proportionale Zusammenhang, der auf eine alltägliche Situation übertragen wird.

Zur Übersetzung in die mathematische Darstellung sind die notwendigen Maße in der Skizze zu finden und in die Formel für den Flächeninhalt von Rechtecken zu übertragen. Anschließend ist das Ergebnis auf mathematischer Ebene zu ermitteln. Die Interpretation im Ausgangskontext besteht im Erstellen eines einsichtigen und übersichtlichen Mietplanes, z. B. in Form einer Tabelle. Schließlich wird das verwendete Modell bezüglich des Kriteriums „gerecht“ von den Schülern analysiert und bewertet.

Da der erste Mietplan nur unter gewissen Umständen den Anforderungen genügt, wird das mathematische Modell modifiziert und der Prozess der Modellierung wiederholt sich, möglicherweise verkürzt, in Teilaufgabe b).

Die Frage nach weiteren monatlichen Kosten entspricht der Phase der Informationsbeschaffung innerhalb einer Mathematisierung: Welche weiteren Kosten gibt es? Wie setzen sich diese zusammen? Die Recherche der notwendigen Informationen ist (nicht nur für Schüler) umfassend und anspruchsvoll. Möglicherweise liefert das Internet geeignete und aktuelle Informationen. Gewinnbringender sollte jedoch die Beschäftigung mit realen Abrechnungen sein. Diese zu verstehen, herauszufiltern, wie sich die Preise zusammensetzen und die Abhängigkeiten der Preise zu studieren, ist vielleicht der größte Lerneffekt bei dieser Aufgabe.

Bei einer intensiven Beschäftigung mit den Zusammenhängen zwischen Alltagssituation und mathematischem Modell können Anforderungen bis zum Bereich III einbezogen werden, z. B. das Reflektieren und kritische Beurteilen der verwendeten Modelle.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Die Aufgabe regt an, sich intensiv mit dem Thema „Miet- und Lebenshaltungskosten“ auseinander zusetzen. Die Schüler werden erstaunt sein, wie wichtig proportionale Zusammenhänge im täglichen Leben sind. Soll dies unterstrichen werden, kann die Aufgabe wie folgt erweitert werden:

  Nun wollen die Studentinnen ihre Zimmer streichen. Sie sollen farbig werden und möglichst jedes anders. Stelle für jede Studentin einen Gestaltungsplan, inklusive Farbverbrauch und Kostenberechnung, zusammen.

- Andererseits kann die Erkenntnis, dass viele Zusammenhänge nicht mehr proportional sind, zum Anlass genommen werden, problemorientiert das Thema „Lineare Funktionen“ einzuführen.
- Wird auf reales Datenmaterial (Rechnungen, Internetseiten, Zeitungsartikel etc.) zurückgegriffen, bietet sich eine Bearbeitung in arbeitsteiligen Kleingruppen an. Aufgrund der Komplexität kann schnell Projektcharakter erreicht werden.
- Die Aufgabe kann auch der Anlass sein, sich erstmalig mit umfassenden Modellierungen von Alltagssituationen zu befassen. Die Unterstützung und Reflexion der Aktivitäten der Informationsverarbeitung rücken dann in den Vordergrund.
- Inhaltliche Aspekte können bei einer schrittweisen selbständigen Bearbeitung in Einschüben der Reflexion herausgestellt werden. Dies empfiehlt sich z. B., wenn die Schüler Unsicherheiten im Umgang mit dem Begriff des proportionalen Zusammenhangs zeigen.

- Durch die gewählte Aufgabenformulierung ist das Vorgehen bei den Teilaufgaben a) und b) vorstrukturiert. Die Aufgabe kann weiter geöffnet werden, insbesondere dann, wenn z. B. in Gruppenarbeit gemeinsam ausgehandelt werden kann:

  Die Studentinnen Paula, Kathrin und Nele haben diese Wohnung gemietet. Sie zahlen insgesamt 520 Euro Kaltmiete. Diskutiert verschiedene Aufteilungen der Miete und begründet, welche ihr für gerecht haltet.

3. Ins Internet mit N-Surfer

Der Netzprovider N-Surfer bietet drei unterschiedliche Tarife an. Die Konditionen dieser Tarife sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tarif	S1	S2	S3
Grundgebühr	9,95 Euro pro Monat	-	4,95 Euro pro Monat
Kosten pro min	1,49 Cent	3,02 Cent	1,99 Cent
Freistunden	-	22.00 – 4.00 Uhr	2 h pro Monat

Löse die folgenden Fragstellungen graphisch oder rechnerisch.

a) Kathleen (14 Jahre) surft wöchentlich im Durchschnitt vier Stunden. Abends schreibt sie gelegentlich noch eine E-Mail. Welchen Tarif von N-Surfer soll Kathleen ihren Eltern vorschlagen? Wie kann sie ihre Entscheidung begründen?

b) Herr Konrad ist selbständiger Ingenieur und nutzt beruflich sehr häufig das Internet. Er wählt Tarif S1. Begründe warum.

c) Für welche Personen könnte der Tarif günstig sein, den weder Kathleen noch Herr Konrad wählen?

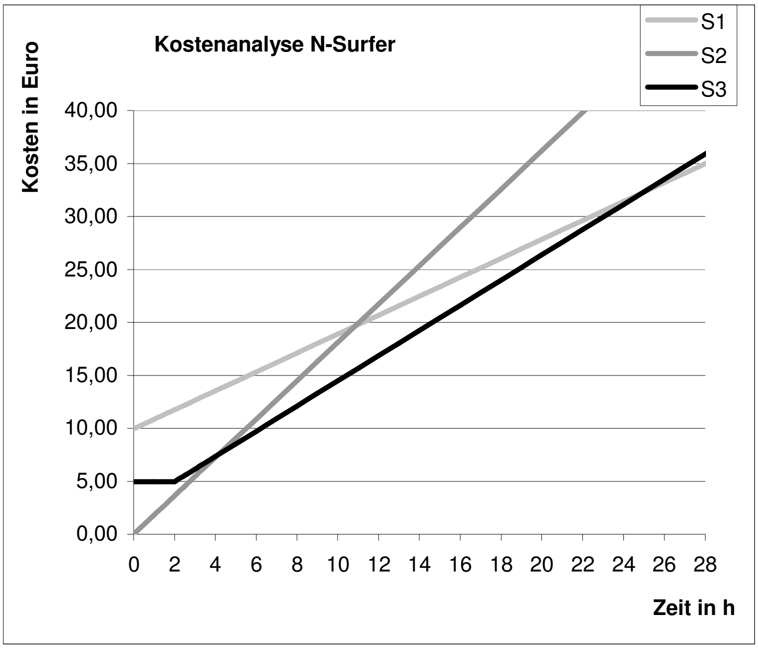
d) Stelle einen weiteren realistischen Tarif auf. Für wen wäre dieser günstig?

Jahrgangsstufen	7/8
Leitidee	Funktionaler Zusammenhang
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch modellieren, mathematisch argumentieren
Angesprochene mathematische Inhalte	lineare Funktionen

Zu 3. Ins Internet mit N-Surfer

Mögliche Lösungswege

Graphische Lösung



Die graphische Darstellung der Tarife erfolgt für den Zeitraum von 4.00 bis 22.00 Uhr. Sowohl Kathleen als auch Herr Konrad werden das Internet vorwiegend innerhalb dieser Zeiten nutzen.

Aus den Schnittpunkten der Geraden folgen diese drei Ergebnisse:

S1: günstig, wenn monatlich (zwischen 4.00 und 22.00) mehr als 25 h gesurft wird

S2: günstig, wenn im Monat tagsüber weniger als 4 h gesurft wird, sonst nur nachts

S3: günstig, wenn im Monat (zwischen 4.00 und 22.00) mehr als 4 h und weniger als 25 h gesurft wird

a) Kathleen

Pro Monat surft Kathleen ca. 16 h im Internet. Wenn sie ab und zu eine E-Mail schreibt und dabei sparsam ist, wird das nicht mehr als 4 h im Monat ausmachen. Aufgrund ihres Alters wird sie selten zwischen 22.00 und 4.00 Uhr am Computer sein. Aus diesen Gründen ist der Tarif S3 für Kathleen am günstigsten.

b) Herr Konrad

Herr Konrad nutzt vor allem tagsüber das Internet. Deshalb kann er die kostenlosen Nachtzeiten nur bedingt nutzen. Aufgrund seiner beruflichen Tätigkeit werden täglich mindestens zwei und monatlich mehr als 40 Internetstunden benötigt. Deshalb ist für Herrn Konrad der Tarif S1 der günstigste.

c) S2

Dieser Tarif ist für Nutzer geeignet, die sehr wenig surfen bzw. dies auch spät abends tun können, wie z. B. berufstätige Menschen, die im Internet gelegentlich nach Reiseverbindungen, eBay-Angeboten, Stellenausschreibungen etc. suchen.

Tarif S2 kann aber auch dann von den angebotenen Tarifen der günstigste sein, wenn sehr viel gesurft wird, tags und nachts. Dann werden die höheren Kosten am Tag durch die kostenlosen Nachtzeiten ausgeglichen. Bei einer monatlichen Nutzung von beispielsweise 30 h zwischen 4.00 und 22.00 Uhr und 30 h zwischen 22.00 und 4.00 Uhr wären mit S1 63,59 Euro, mit S2 54,36 Euro und mit S3 74,20 Euro zu bezahlen.

d) Neuer Tarif

Es könnte für unterschiedliche Tageszeiten unterschiedliche Tarife geben. Eine Absenkung der Kosten pro Einheit ab 18.00 Uhr wäre für ältere Schüler günstig, ebenso kostenloses Surfen am Sonntag, wie schon bei manchen Telefonanbietern.

Rechnerische Lösung

Der Zusammenhang zwischen den genutzten Internetstunden und den Kosten wird (für den Zeitraum von 4.00 und 22.00 Uhr) durch Gleichungen beschrieben.

x: Zeit in h, y: Kosten in Euro

S1: $y_1 = 9{,}95+0{,}89x$

S2: $y_2 = 1{,}81x$

S3: $y_3 = 4{,}95+1{,}19(x-2)$

Bei diesen Gleichungen entspricht der konstante Anteil der Grundgebühr und die Steigung den Kosten pro Internetstunde. Durch Gleichsetzung jeweils zweier Gleichungen werden die Stellen der Kostengleichheit bestimmt.

S1S2: $9{,}95 + 0{,}89x = 1{,}81x$, $x = 10{,}82$ h

Wird weniger als ca. 10 h und 50 min gesurft, ist S2 günstiger als S1.

S2S3: $1{,}81x = 4{,}95 + 1{,}19(x - 2)$, $x = 4{,}15$ h

Wird weniger als ca. 4 h und 10 min gesurft, ist S2 günstiger als S3.

S1S3: $9{,}95 + 0{,}89x = 4{,}95 + 1{,}19(x - 2)$, $x = 24{,}6$ h

Wird weniger als ca. 24 h und 35 min gesurft, ist S3 günstiger als S1.

Aus diesen Ergebnissen ergeben sich die Antworten auf die Fragen analog zur graphischen Lösung. Die Zeiten können nun noch genauer angegeben werden.

Zu 3. Ins Internet mit N-Surfer

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Die Fragen können auf Grundlage einer graphischen Darstellung der gegebenen Tarife beantwortet werden. Sinnvoll ist es dafür, die monatlichen Kosten in Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. Weiterhin müssen die Schüler selbständig

- eine geeignete Darstellungsform auswählen (z. B. Koordinatensystem im positiven Bereich),
- einen Weg finden, die Daten einzutragen (Wertetabelle oder y-Achsenabschnitt und Steigung),
- geeignete Intervalle und Achseneinteilungen wählen,
- geeignete Beschriftungen vornehmen und gegebenenfalls kommentieren.

Ordnen die Schüler der Grundgebühr den y-Achsenabschnitt und den Kosten pro Einheit die Steigung richtig zu, wozu bereits das Mathematisierungsmuster der linearen Funktion erkannt werden muss, ist immer noch ein Weg zu finden, die Freistunden des Tarifes S3 in der Graphik zu berücksichtigen. Außerdem muss erkannt werden, dass die kostenlosen Nachtzeiten des Tarifs S2 nicht zusammen mit den Konditionen am Tag dargestellt werden können. Die Anforderungen liegen hier deutlich über denen einer Standarddarstellung linearer Funktionen (Anforderungsbereich III).

K3 Mathematisch modellieren

Voraussetzung für die mathematische Modellierung ist, dass die Schüler das Alltagsproblem des geeigneten Internettarifs mit dem Mathematisierungsmuster der linearen Funktion in Verbindung bringen.

Eine Übersetzung in die formale Sprache und eine Lösung der Probleme innerhalb der formalen bzw. symbolischen mathematischen Sprache ist nicht zwingend nötig, da alle Fragestellungen anhand einer graphischen Darstellung beantwortet werden können. Insbesondere müssen nicht zwingend die Funktionsterme bestimmt werden.

Für die Zuordnung günstiger Tarife zu verschiedenen Personengruppen ist es wichtig, die Angaben der Aufgabenstellung geeignet zu interpretieren. Beispielsweise können durch das Alter von Kathleen Nachtzeiten für sie (weitgehend) ausgeschlossen werden. Auch Abstraktionen und Abschätzungen sind selbständig vorzunehmen. So ist nicht eindeutig, welche monatliche Nutzungszeit mit einer sehr häufigen beruflichen Nutzung zu verbinden ist.

Die durchzuführende Modellierung ist einschrittig. Das zugrundeliegende mathematische Modell ist vertraut und direkt erkennbar, insbesondere, wenn bereits ähnliche Aufgaben (z. B. Handy-/Telefon-Tarife) bearbeitet wurden. Da aber eigenständige Abstraktionen und Auslegungen vorzunehmen sind, entspricht der Anforderungsbereich hier dem „Herstellen von Zusammenhängen“ (Anforderungsbereich II).

K1 Mathematisch argumentieren

Die Auswahl der Tarife für bestimmte Personen oder Personengruppen ist von den Schülern zu begründen. Grundlage der Argumentation bilden die im mathematischen Modell (graphisch oder rechnerisch) bestimmten Stellen der Kostengleichheit zweier Tarife. Die Schüler entscheiden anhand der Ansprüche der Personen, in welchem Intervall die monatlich (im Mittel) von ihnen genutzte Internetzeit liegt. Die Interpretation der zu den Personen gegebenen Daten und die Formulierung von Schlussfolgerungen wird voraussichtlich verbal, in der Sprache des Kontextes erfolgen. Wichtig ist eine logisch schlüssige Verbindung der mathematischen Ergebnisse und der Bedingungen des Kontextes.

Die überschaubare mehrschrittige Argumentation entspricht Anforderungsbereich II.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Insbesondere das Einbeziehen von „Freizeiten“ führt dazu, dass die Aufgabe über Standardanforderungen zum Thema „lineare Funktionen“ hinausgeht. Werden diese (zunächst) ausgeklammert, ergibt sich eine realitätsnahe Anwendung auf gewohntem Schwierigkeitsniveau.
- Die Antworten auf die Fragen sind nicht eindeutig. Eine Diskussion unterschiedlicher möglicher Entscheidungen auf Grundlage des gleichen (korrekten) mathematischen Ergebnisses ist deshalb wichtig.
- Je nach Leistungsstand der Klasse kann auch vorgegeben werden, ob graphisch oder rechnerisch gelöst wird.
- Entscheiden die Schüler selbst, welche Lösungsmethode sie wählen, kann gemeinsam über die Vor- und Nachteile beider Lösungsverfahren diskutiert werden: Welches Verfahren ist effektiver, genauer, einfacher, anschaulicher etc.? Ziel ist dabei jedoch nicht, <u>ein</u> Verfahren herauszustellen, sondern zu verdeutlichen, wie sich (auch individuelle) Anforderungen an das Ergebnis auf die Auswahl eines Verfahrens auswirken.
- Die Aufgabe kann erweitert werden, indem die Schüler ihre Ansprüche an die Internetnutzung analysieren und den für sie günstigsten Tarif bestimmen. Sie könnten auch einen Tarif erfinden, der für sie ideal, aber dennoch realistisch wäre.
- Wie viele realitätsnahe Aufgaben lädt auch diese dazu ein, sich tiefer mit dem außermathematischen Kontext zu beschäftigen. Hier könnten reale Tarife dargestellt und verglichen werden. Vielleicht kann der eine oder andere Schüler mit Hilfe der Mathematik etwas Geld einsparen. Die Nützlichkeit der linearen Funktionen sollte auf jeden Fall deutlich werden.

4. Summen von Winkeln

Finde eine Begründung dafür, dass die Winkelsumme in einem Fünfeck immer 540° beträgt.

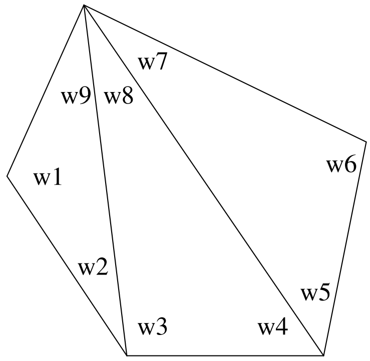
Bestimme auch die Winkelsumme im 6-, 7- und 8-Eck.

Versuche deine Erkenntnisse zu verallgemeinern, indem du eine Formel für die Winkelsumme im n-Eck entwickelst.

Quelle	Erweiterung einer Aufgabe aus A. Büchter, T. Leuders (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen, S. 95
Jahrgangsstufen	7/8 (P4 7/8)
Leitidee	Raum und Form, Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen, mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch argumentieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Angesprochene mathematische Inhalte	Winkelsumme im Dreieck, im Fünfeck, ... im n-Eck

Zu 4. Summen von Winkeln

Möglicher Lösungsweg



$S_5 = w1 + w2 + w3 + w4 + w5 + w6 + w7 + w8 + w9$

$= (w1 + w2 + w9) + (w3 + w4 + w8) + (w5 + w6 + w7)$

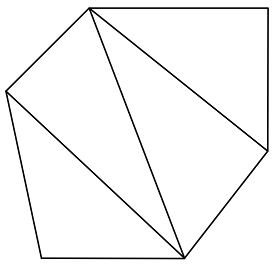
$= 180° + 180° + 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$= 3 \times 180°$

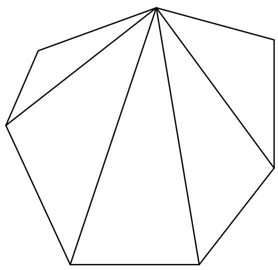
$= 540°$

Das Fünfeck wird durch die zwei Hilfslinien in drei Dreiecke zerlegt. Bei dieser Zerlegung[8] (Hilfslinien schneiden sich nicht.) ergibt sich die Winkelsumme des Fünfecks, indem alle Winkel der Dreiecke addiert werden. Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°. Nach obiger Rechnung folgt dann für das Fünfeck eine Winkelsumme von 3 x 180°, also 540°.

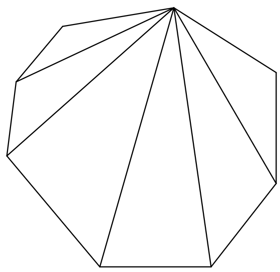
Dieses Vorgehen ist auf 6-, 7- und 8-Ecke übertragbar, da diese analog in Dreiecke zerlegt werden können. Die Berechnung der Winkelsumme erfolgt nach dem gleichen Prinzip: Die Anzahl der Dreiecke wird mit der Winkelsumme in einem Dreieck (180°) multipliziert.



$S_6 = 4 \times 180° = 720°$



$S_7 = 5 \times 180° = 900°$



$S_8 = 6 \times 180° = 1080°$

Wie die Beispiele zeigen, lässt sich ein n-Eck anscheinend immer in der gewählten Art und Weise (Hilfslinien verlaufen von einer Ecke zu einer anderen und schneiden sich nicht) in Dreiecke zerlegen. Die Anzahl der Dreiecke beträgt dabei n-2. Bei dieser Zerlegung können alle entstandenen Winkel für die Bestimmung der Winkelsumme des n-Ecks addiert werden (keine Winkel bzw. Teile davon werden doppelt einbezogen, keine inneren Winkel werden hinzugerechnet). Die Winkelsumme im n-Eck ergibt sich dann aus dem Produkt der Winkelsumme in einem Dreieck (180°) mit der Anzahl der Dreiecke (n-2):

$S_n = (n - 2) \times 180°$.

[8] Es gibt weitere Zerlegungsmöglichkeiten. Beispielsweise kann das Fünfeck in fünf Dreiecke zerlegt werden, die einen gemeinsamen Punkt im Inneren des Fünfecks haben. Für die Winkelsumme müssen dann, nach der Addition aller Winkel, 360° für die inneren Winkel abgezogen werden.

Zu 4. Summen von Winkeln

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K2 Probleme mathematisch lösen

Für das Anfangsproblem, vor dem die Schüler stehen, ist Ausgangspunkt und Ziel gegeben, nur nicht der Weg: Wie kommt man auf die gegebene Winkelsumme? Wie so oft bei geometrischen Aufgaben gibt es dafür kein Routineverfahren. Selbst wenn die Schüler geübt in der Zerlegung von Figuren sind, liegt eine neue Situation vor, die auf bekannte zurückgeführt werden muss. Ein hilfreiches Stichwort dafür ist gegeben: „Winkelsumme“. Es bleibt nun zu durchdenken, für welche Figuren die Winkelsumme bekannt ist und wie das Fünfeck in diese Figuren zerlegt werden kann. Für die Zerlegung selbst gibt es verschiedene Möglichkeiten. Neben der dargestellten Variante kann das Fünfeck auch in fünf Dreiecke zerlegt werden, die sich im Inneren berühren oder in ein Viereck und ein Dreieck.

Für die folgenden Teilaufgaben werden weitere heuristische Kompetenzen benötigt: das Transferieren einer Lösungsstrategie auf neue Anwendungsbeispiele, das Analysieren und Vergleichen von Eigenschaften vorliegender Figuren, das Herausstellen von gemeinsamen Strukturen und schließlich das Verallgemeinern entdeckter Zusammenhänge.

Je nachdem wie vertraut die Schüler mit der Methode der Zerlegung in Hilfsfiguren und den weiteren genannten heuristischen Aktivitäten sind, liegen die Anforderungen bezüglich der Problemlösekompetenz im Bereich II oder III.

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Die Aufgabenstellung ist bis auf einzelne Ziffern verbal gegeben. Zur Begründung der Winkelsumme sind dagegen graphische und formale Darstellungen erforderlich. Die Zerlegung des Fünfecks ist graphisch zu veranschaulichen. Dabei ist es wichtig, die Winkel geeignet zu benennen. Andernfalls ist eine formale Berechnung der Winkelsumme kaum nachvollziehbar. Erfolgt die Bestimmung der Winkelsumme im 6-, 7-, 8-Eck analog, genügt dann eine skizzenhafte Darstellung der Zerlegungen, um zu verdeutlichen, dass diese möglich sind.

Die Schüler sind gefordert, Beziehungen zwischen den Darstellungen zu erkennen und zwischen den Darstellungsformen zu wechseln. Formale und graphische Darstellungen dienen hier als Argumentationsmittel und sind daher so zu gestalten, dass sie die Argumentation stützen und möglicherweise vereinfachen. Diese Anforderungen entsprechen dem Bereich II.

K1 Mathematisch argumentieren

Mathematische Argumentationen in Form von Begründungen, Erläuterungen, Kommentaren sind bei einer angemessenen Bearbeitung und nachvollziehbaren Darlegung der Gedankengänge in a) und c) notwendig („Begründung“, „entwickelst“), in b) sinnvoll.

Die Darstellung und Ausführlichkeit der Argumentation kann dabei individuell stark variieren. Einige Schüler nutzen vorwiegend formale Darstellungen, andere argumentieren überwiegend verbal. Dies gilt insbesondere für die Verallgemeinerung. Hier kann die formale Darstellung so gewählt werden, dass sich die Verallgemeinerung folgerichtig ergibt, praktisch abgelesen werden kann. Die gemeinsamen Strukturen können aber auch verbal beschrieben werden. Wichtig ist eine schlüssige, nachvollziehbare und lückenlose Argumentation. Bei einer verbalen Argumentation ist die mathematische Fachsprache einzusetzen (z. B. „Hilfslinien", „Zerlegung in Dreiecke", „Winkelsumme", „addieren"). Die geforderte Stringenz und Exaktheit sollte dabei den bisherigen Maßstäben in der speziellen Klasse angepasst werden.

Die hier einbezogenen Aktivitäten des Argumentierens (Erläutern oder Entwickeln einer überschaubaren mehrschrittigen Argumentation, Beschreiben und Begründen eines Lösungsweges, Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern) entsprechen dem Anforderungsbereich II.

K5 Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die Symbolik spielt innerhalb der Argumentation eine wichtige Rolle. Zur Bezeichnung der Winkel sind geeignete Variablen auszuwählen und in der Zeichnung so anzuordnen, dass die Rechnung nachvollziehbar ist. Innerhalb der Berechnung selbst ist es günstig, die Winkel nach Dreiecken zu ordnen. Dann kann ohne umfangreiche Kommentare die Winkelsumme im Dreieck eingesetzt werden. Die Rechnung selbst entspricht Routineanforderungen auf Grundschulniveau.

Auch für die Verallgemeinerung ist der verständige Umgang mit Variablen und die Darstellung gemeinsamer Strukturen wichtig. Hierfür sind ggf. geeignete Termumformungen sinnvoll. Der zielorientierte Einsatz von Termumformungen und formalen Darstellungen wird dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Für die erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe ist eine inhaltsbezogene heuristische Strategie von Bedeutung: das geschickte Zerlegen einer Figur bzw. das Einzeichnen geeigneter Hilfslinien. Ohne diesen „Trick" ist ein Zugang zur Aufgabe schwer möglich. Um Frustration bei der selbständigen Bearbeitung zu vermeiden, sollten die Schüler diese Strategie kennen und auch schon selbständig eingesetzt haben. Anderenfalls kann ein Austausch von Ideen in Kleingruppen oder im Klassenverband Anregungen verschaffen. Die Methode der Zerlegung in Hilfsfiguren sollte dabei als wichtige Methode des Lösens geometrischer Probleme herausgestellt werden.
- Schüler der siebenten oder achten Klasse sind noch nicht so geübt darin, Ergebnisse aus Beispielen zu verallgemeinern. Die Gedanken und Vermutungen der Schüler können gemeinsam präzisiert und zu einer schlüssigen Darstellung geordnet werden, so dass schließlich eine begründete Verallgemeinerung vorliegt.
- Lässt es die Größe der Lerngruppe zu, kann die Aufgabe auch in einem Lerntagebuch bearbeitet werden. Anregungen zum Problemlösen und heuristische Hilfen werden dann durch den Lehrer schriftlich gegeben. Das dokumentierte Fortschreiten innerhalb eines exemplarischen Problemlöseprozesses, einschließlich der schriftlich fixierten Anregungen, kann wiederum als Hilfestellung bei neuen, nicht nur ähnlichen, Problemen dienen.

5. Eine Würfelentscheidung

Daniela und ihr jüngerer Bruder Jörg streiten sich häufig darüber, wer von ihnen den Müll wegbringt. Deshalb schlägt Daniela Jörg vor, einen Würfel entscheiden zu lassen: „Du darfst dreimal würfeln. Ist eine Sechs dabei, trage ich den Müll runter, sonst machst du das.“ Jörg erscheint die Sache fair.

Probiert es zu zweit aus. Was haltet ihr von Danielas Vorschlag?

Prüft eure Einschätzung nun durch systematische Überlegungen.

Welches Glücksspiel hättet ihr in dieser Situation vorgeschlagen?

Quelle	Modifikation der gleichnamigen Aufgabe von W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen, S. 128
Jahrgangsstufen	7/8 (P8 7/8)
Leitidee	Daten und Zufall, Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen, mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch argumentieren
Angesprochene mathematische Inhalte	Zufallsversuch, systematisches Ordnen

Zu 5. Eine Würfelentscheidung

Möglicher Lösungsweg

Das Spiel ist dann gerecht, wenn die Anzahl der für Jörg günstigen Fälle (Ausgänge) und die Anzahl der für Daniela günstigen Fälle (bzw. der für Jörg ungünstigen Fälle) übereinstimmt. Um dies zu prüfen, werden die für Jörg günstigen Fälle geordnet und gezählt, wobei die Ziffern innerhalb der Tripel den Augenzahlen beim ersten, zweiten, dritten Wurf entsprechen.

Beim ersten Wurf eine Sechs:

611	612	613	614	615	616
621	622	623	624	625	626
631	632	633	634	635	636
641	642	643	644	645	646
651	652	653	654	655	656
661	662	663	664	665	666

→ 36 Fälle

Erst beim zweiten Wurf eine Sechs:

161	162	163	164	165	166
261	262	263	264	265	266
361	362	363	364	365	366
461	462	463	464	465	466
561	562	563	564	565	566

→ 30 Fälle

Erst beim dritten Wurf eine Sechs:

116	126	136	146	156
216	226	236	246	256
316	326	336	346	356
416	426	436	446	456
516	526	536	546	556

→ 25 Fälle

Somit gibt es für Jörg 36 + 30 + 25 = 91 günstige Fälle.

Insgesamt gibt es jedoch 6 x 6 x 6 = 216 unterschiedliche Ausgänge dieses Glücksspiels.

Da 91 kleiner als die Hälfte von 216 (108) ist, gibt es für Jörg mehr ungünstige Fälle als günstige. Danielas Vorschlag ist nicht gerecht.

Vorschlag für eine einfache und gerechte Zufallsentscheidung:

Einmal würfeln. Ist die Augenzahl gerade, bringt Daniela den Müll weg, ist die Augenzahl ungerade, bringt Jörg den Müll weg. Für jeden Spieler gibt es dabei drei günstige und drei ungünstige Fälle. Das Spiel ist gerecht.

Eine andere einfache Variante wäre „Kopf oder Zahl“.

Zu 5. Eine Würfelentscheidung

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K2 Probleme mathematisch lösen

In den Lösungshinweisen zu dieser Aufgabe schreiben die Autoren Herget, Jahnke, Kroll (2001, S. 206) „Diese Aufgabe dient dazu, den typischen Fehlschluss ‚bei drei Würfen beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs $\frac{3}{6}$, also $\frac{1}{2}$' zu entlarven. Schon nach wenigen Minuten Würfeln liegen genügend Ergebnisse vor, um erkennen zu lassen, dass Daniela besser dran ist. Die theoretische Begründung kann entweder mithilfe eines Baumdiagramms, anschaulicher jedoch durch Abzählen der für Jörg günstigen Fälle erfolgen." Für das systematische Abzählen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine sehr ausführliche Darlegung wurde in der Beispiellösung vorgestellt. Zwei weitere Lösungsvarianten beschreiben die oben genannten Autoren: das Zählen der günstigen Fälle ausgehend vom zweimaligen Würfeln und die effektive Strategie des Bestimmens der für Jörg ungünstigen Fälle (Herget, Jahnke, Kroll 2001, S. 206). Für diese Aufgabe gibt es somit unterschiedliche Lösungsstrategien. Jeder Schüler kann einen eigenen Zugang finden, der unterstützt wird durch das vorangestellte Handeln.

Zur Lösung dieser Aufgabe liegt den Schülern kein Lösungsverfahren vor. In der siebenten und achten Klasse haben die Schüler kaum Erfahrungen mit stochastischen Problemen. Das (ausführliche) systematische Ordnen möglicher Ausgänge ist hier eine hilfreiche Methode und sollte nicht als „unprofessionelles Verfahren" gesehen werden. Es verlangt die Fähigkeiten ein geeignetes Systematisierungsschema zu finden, zugehörige Fälle vollständig zu erfassen, eine Einheit auf Vollständigkeit zu überprüfen, Schlussfolgerungen zu ziehen und Verallgemeinerungen zu treffen. Diese heuristischen Aktivitäten entsprechen dem Anforderungsbereich II.

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Beim systematischen Ordnen ist eine geeignete Darstellung nicht nur zur Präsentation erforderlich, sondern auch für das Überprüfen der Vollständigkeit einer Fallgruppe und für das Bestimmen der Anzahl der Fälle äußerst hilfreich. Eine mögliche Darstellung der Fallgruppen und Untergruppen wurde vorgestellt. Eine weitere übliche Möglichkeit, die Ausgänge von Zufallsversuchen systematisch zu ordnen, ist das Baumdiagramm. Dieses steht den Schülern zwar noch nicht als Methode zur Verfügung, intuitive Darstellungen ähnlicher Form sind jedoch durchaus denkbar. Auch Tabellen und schematische Darstellungen sind möglich. Hier ist somit ein Anlass zur Entwicklung einer eigenen, der individuellen Herangehensweise des Schülers dienlichen Darstellung gegeben (Anforderungsbereich III).

K1 Mathematisch argumentieren

Die Schüler haben ausgehend von einem Durchspielen der Situation eine Hypothese dazu aufgestellt, ob das gewählte Entscheidungsmittel gerecht ist. Diese ist nun von ihnen durch systematische Überlegungen, also auf mathematischer Ebene, zu prüfen.

Die Argumentation muss dabei keineswegs (sprachlich) komplex sein. Ist die Darstellung der Fälle geeignet, können einfache, teilformale Schlussfolgerungen ausreichend sein. Dennoch sind mehrere Stufen erforderlich; zunächst ist auf die Anzahl der für Jörg günstigen Fälle zu schließen, dann auf deren Verhältnis zur Gesamtzahl der möglichen Ausgänge und schließlich ist zu urteilen, ob das vorgeschlagene Entscheidungsmittel gerecht ist. Für diese Bewertung muss ein geeignetes Kriterium benannt werden. Somit liegt hier die Entwicklung einer überschaubaren mehrschrittigen Argumentation vor, was dem Anforderungsbereich II der Kompetenzgruppe des mathematischen Argumentierens entspricht.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Für viele Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennen Schüler der siebenten oder achten Klasse kein Standardverfahren. Kreatives Denken und heuristische Strategien werden wichtig. Deshalb sollten diese Aufgaben angemessen in den Mathematikunterricht eingebunden werden. Im neuen Berliner Rahmenplan für die Sekundarstufe I (www.lisum.de) findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder Berücksichtigung. Aber auch Einschübe einzelner interessanter Aufgaben z. B. in Vertretungsstunden können zur Kompetenzentwicklung beitragen.
- Das systematische Ordnen sollte als heuristische Strategie Anerkennung finden, indem es im Unterricht demonstriert und von den Schülern selbst ausgeführt wird. Das Finden geeigneter Ordnungssysteme und die Zuordnung der Ereignisse oder Objekte ist eine fachübergreifende Strategie, die nicht nur bei mathematischen Aufgaben äußerst hilfreich sein kann. Wichtig dabei ist, zunächst das Herangehen an eine solche Systematisierung zu lernen (Wie können geeignete Gruppen ausgewählt werden? Welche Darstellungsmöglichkeiten/Gruppierungsschemata gibt es?). Innerhalb der Reflexion einer Anwendung können dann unterschiedliche Systematisierungsmöglichkeiten, z. B. bezüglich ihrer Effektivität oder auch ihrer Fehleranfälligkeit, diskutiert werden.
- Bei dieser Aufgabe kann das Ziel verblüffend schnell erreicht werden, wenn die für Jörg ungünstigen Ausgänge bestimmt werden. Die oft effektive Methode des Bestimmens der für das Gegenereignis günstigen Fälle sollte den Schülern nicht vorenthalten werden. Vielleicht kommt diese Idee ja sogar von den Schülern selbst. Mit dieser Strategie können auch schnell und einfach Würfelentscheidungen mit mehr als drei Würfen untersucht werden. Eine geeignete Weiterführung der Aufgabe wäre

  „Erhöhen sich die Chancen von Jörg, wenn viermal gewürfelt wird?“

  Dann gibt es $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ Möglichkeiten, bei denen keine Sechs in allen vier Würfen auftritt. Insgesamt aber $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ mögliche Fälle. Jörg hätte nun in der Tat einen, wenn auch geringen, Vorteil.
- Die Aufgabe kann auch eingesetzt oder aufgegriffen werden, wenn die Schüler bereits mit Wahrscheinlichkeiten rechnen können (P8 9/10). Die Veränderung der Chancen beider Spieler bei Variation der Anzahl der Würfe kann dann mit Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden, z. B.:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 > 0{,}5 \quad \text{aber} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 < 0{,}5 \,.$$

6. Kleingeld ist keine Kleinigkeit

In der sagenhaften Stadt Moneta gab es nur zwei Münzsorten, eine im Wert von 7 Cent und eine im Wert von 12 Cent. Die Stadt Schilda machte es ihr nach, prägt aber Münzen im Wert von 6 Cent und 15 Cent.

a) Untersuche, welche Beträge die Bürger von Moneta und Schilda bezahlen können, wenn sie genug Münzen bei sich tragen und ihnen auch entsprechend herausgegeben werden kann. Können Sie etwas kaufen, was nur einen Cent kostet?

b) Ein pfiffiger Bürger von Moneta behauptet, er könnte jeden Betrag mit nur **einer** Münzsorte bezahlen, wenn ihm nur mit der **anderen** herausgegeben wird. Prüfe diese Behauptung.

c) Wie viele Münzsorten hat unser Währungssystem? Ist es deiner Meinung nach besser oder schlechter als das von Moneta? Begründe deine Antwort.

Quelle	Modifikation der gleichnamigen Aufgabe von W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen, S. 37
Jahrgangsstufen	7/8[9]
Leitidee	Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen, mathematisch argumentieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, kommunizieren
Angesprochene mathematische Inhalte	Grundrechenarten, Teilbarkeit

[9] Die Aufgabe ist eine problemorientierte Wiederholung, Anwendung und Vertiefung wichtiger Inhalte der Primarstufe.

Zu 6. Kleingeld ist keine Kleinigkeit

Mögliche Lösungswege

a) 1. Möglichkeit: Ausprobieren bzw. naive Herangehensweise

Moneta:	$1 = 49 - 48 = 7 \cdot 7 - 4 \cdot 12$	Ein Cent kann bezahlt werden.
	$2 = 14 - 12 = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 12$	Zwei Cent können bezahlt werden.
	$3 = 24 - 21 = 2 \cdot 12 - 3 \cdot 7$	Drei Cent können bezahlt werden.
	$4 = 28 - 24 = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 12$	Vier Cent können bezahlt werden.
	$5 = 12 - 7$	Fünf Cent können bezahlt werden.
	$6 = 42 - 36 = 6 \cdot 7 - 3 \cdot 12$	Sechs Cent können bezahlt werden.
	$7 = 1 \cdot 7$	Sieben Cent können bezahlt werden.
	$8 = 36 - 28 = 3 \cdot 12 - 4 \cdot 7$	Acht Cent können bezahlt werden.
	$9 = 21 - 12 = 3 \cdot 7 - 1 \cdot 12$	Neun Cent können bezahlt werden.
	$10 = 70 - 60 = 10 \cdot 7 - 5 \cdot 12$	Zehn Cent können bezahlt werden.
	$11 = 35 - 24 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 12$	Elf Cent können bezahlt werden.
	$12 = 1 \cdot 12$	Zwölf Cent können bezahlt werden.
	$13 = 12 + 1 = 1 \cdot 12 + 7 \cdot 7 - 4 \cdot 12 = 7 \cdot 7 - 3 \cdot 12$	

Durch ähnliche Additionen und Subtraktionen können alle weiteren Beträge zusammengestellt werden[10]. Die Bürger aus Moneta können deshalb mit ihren beiden Münzsorten alle Beträge bezahlen. Dies kann bereits daraus gefolgert werden, dass ein Cent mit dem Münzsystem aus Moneta bezahlt werden kann.

Schilda:	$1 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$2 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$3 = 15 - 12 = 1 \cdot 15 - 2 \cdot 6$	Drei Cent können bezahlt werden.
	$4 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$5 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$6 = 1 \cdot 6$	Sechs Cent können bezahlt werden.
	$7 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$8 = ?$	keine Darstellung gefunden
	$9 = 15 - 6 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot 6$	Neun Cent können bezahlt werden.

Mit den beiden Münzsorten aus Schilda können nur Beträge bezahlt werden, die ein Vielfaches der Drei sind. Beträge von nur einem Cent können nicht bezahlt werden. Ursache ist, dass beide Münzbeträge Vielfache der Drei sind.

[10] Eine solche Schlussfolgerung geht bereits über den naiven Weg des Ausprobierens hinaus.

a) 2. Möglichkeit: Analytische Betrachtung

Moneta:

$1\cdot 7,\ 2\cdot 7, ...$	Vielfache von Sieben können bezahlt werden.
$1\cdot 12,\ 2\cdot 12, ...$	Vielfache von Zwölf können bezahlt werden.
$1\cdot(7+12),\ 2\cdot(7+12), ...$	Vielfache der Summe von Sieben und Zwölf können bezahlt werden.
$2\cdot 7+1\cdot 12,\ 3\cdot 7+1\cdot 12, ...$ $1\cdot 7+2\cdot 12,\ 1\cdot 7+2\cdot 12, ...$	Die Summen der Vielfachen von Sieben und Zwölf können bezahlt werden.

Ohne Herausgeben können Beträge der Form $n\cdot 7+m\cdot 12$ bezahlt werden, wobei *n* und *m* natürliche Zahlen sind.

Wird herausgegeben, kann *n* oder *m* auch negativ sein, z. B. $2\cdot 7-12$.

Dadurch können beispielsweise auch Vielfache[11] von Drei bezahlt werden, denn $3=5-2=12-7-(2\cdot 7-12)=2\cdot 12-3\cdot 7$, $6=2\cdot 3=4\cdot 12-6\cdot 7$ und auch Beträge von nur einem Cent, denn

$1=3-2=2\cdot 12-3\cdot 7-(2\cdot 7-12)=3\cdot 12-5\cdot 7$.

Die Bürger von Moneta können deshalb mit ihren zwei verschiedenen Münzsorten jeden Preis bezahlen.

Schilda: Analog zu den Ergebnissen für Moneta können die Bürger aus Schilda Beträge der Form $n\cdot 6+m\cdot 15$ bezahlen, wobei *n* und *m* ganze Zahlen sind, jedoch nur eine von beiden negativ.

Es können Vielfache der Zahlen 3, 6, 9, 12, 15, ... bezahlt werden, also nur Beträge, die Vielfache der Drei sind. Da auch die Summen und Differenzen dieser Beträge wieder Vielfache der Drei sind, kann z. B. keine Zwei, keine Vier und auch nicht die Eins erreicht werden. Die Bürger von Schilda können deshalb mit ihrem Münzsystem nicht jeden Preis bezahlen. Ursache ist, dass beide Münzbeträge Vielfache einer Zahl, der Drei, sind. Die Werte der Münzsorten von Moneta haben keinen gemeinsamen Teiler.

b) Der Betrag von einem Cent kann durch die Münzsorten von Moneta erhalten werden, wenn drei 12-Cent-Münzen bezahlt werden und fünf 7-Cent-Münzen herausgegeben werden. Bei Beträgen von zwei Cent könnte man folglich sechs 12-Cent-Münzen bezahlen und würde zehn 7-Cent-Münzen zurück bekommen. Somit können alle Beträge bezahlt werden, indem mit 12-Cent-Münzen bezahlt und mit 7-Cent-Münzen herausgegeben wird.

c) Unser Münzsystem hat folgende Münzsorten: 1 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro, 2 Euro. Hat ein System geschickt gewählte Münzsorten, können viele verschiedene, insbesondere auch höhere, Beträge mit wenigen Münzen bezahlt werden.

z. B. 99 Cent: Europa: einen Euro hingeben, einen Cent zurück bekommen
Moneta: drei 12er und neun 7er hingeben oder
zehn 12er hingeben, drei 7er zurück bekommen

Je mehr geschickt gewählte Münzsorten es gibt, desto weniger Münzen müssen pro Kassiervorgang bewegt werden. So kann in unserem System der Betrag von einem Cent sehr einfach bezahlt werden. Es gibt auch verschiedene Möglichkeiten einen einzelnen Wert aus Münzen zusammenzustellen. Dadurch kann öfter „passend“ gegeben bzw. herausgegeben werden. Aus diesen Gründen ist unser System geeigneter als das von Moneta.

[11] Dies ist eine wichtige Schlussfolgerung, die innerhalb der Reflexion zu dieser Aufgabe auch thematisiert, ab Klasse 7 sogar nachgewiesen, werden könnte.

Zu 6. Kleingeld ist keine Kleinigkeit

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K2 Probleme mathematisch lösen

Zunächst stellt sich den Schülern die Frage, welche Münzbeträge in beiden Münzsystemen bezahlt werden können. Dazu wurden zwei prinzipiell verschiedene Herangehensweisen vorgestellt[12]. Innerhalb dieser Strategien sind weitere Differenzierungen zu einzelnen Lösungsschritten möglich. Die Aufgabe ist somit offen bezüglich des Lösungsweges.

Für diese Aufgabenstellung werden die Schüler in der Regel keinen passenden Lösungsalgorithmus parat haben. Eine geeignete Lösungsstrategie ist selbst zu entwickeln. Das vorgestellte Betrachten von Einzelfällen mit anschließender Analyse und Verallgemeinerung (induktives Vorgehen) ist eine geeignete heuristische Herangehensweise.

Eine zweite Forderung heuristischer Kompetenzen wird an die Schüler gestellt, indem sie den Betrag von einem Cent aus den gegebenen Münzen darstellen sollen. Das gefundene Ergebnis kann die Basis für die Beantwortung der nächsten Frage bilden. Ebenso ist die Argumentationsbasis zur Einschätzung unseres Währungssystems von den Schülern selbst zu finden. Es sind selbständig Argumente, die Vor- und Nachteile unseres Systems plausibel verdeutlichen, zu suchen und zu wählen.

Insgesamt bietet diese Aufgabe reichhaltige Gelegenheiten kreativ tätig zu sein und heuristische Strategien, Hilfsmittel und Prinzipen zu verwenden (Anforderungsbereich II).

K5 Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen

Beim induktiven Vorgehen sind zur Bearbeitung der Aufgabe einfache Berechnungen auf Grundschulniveau und eventuell das Aufstellen einfacher Terme ausreichend.

Übersetzungen zwischen natürlicher Sprache (Sprache des Kontextes) und symbolischer Sprache spielen bei dieser Aufgabe eine große Rolle. Schon der Zusammenhang zwischen „Herausgeben“ und negativem Vorzeichen des jeweiligen Betrages ist diesbezüglich eine wichtige Abstraktion. Auch der Wechsel zwischen unterschiedlichen formalen Darstellungen, z. B. Darstellung als Summe – Darstellung als Produkt, ist ein Aspekt dieser Kompetenzgruppe, der hier mehrfach umgesetzt werden kann. Aufgrund der zahlreichen möglichen Übersetzungsvorgänge entsprechen die Anforderungen dem Bereich II.

K1 Mathematisch argumentieren

Die letzte Teilaufgabe fordert von den Schülern eine Bewertung unseres Währungssystems. Das Bewerten zählt zu den anspruchsvollsten mathematischen Tätigkeiten. Die Anforderung liegt bei dieser Bewertung auf der Argumentation, nicht auf den dazu auszuführenden formalen Elementen. Zunächst sind geeignete Argumente für die Bewertung auszuwählen, wofür sich die „Anzahl“ und die „Beträge“ der laufenden Münzen anbieten. Anschließend sind diese beiden Aspekte von den Schülern auf formalem oder verbalem Weg auszuführen. Ein exemplarisches Herangehen (Zusammensetzen des Betrages von 99 Cent in beiden Münzsystemen)

[12] Vgl. hierzu auch die Lösungshinweise in Herget, Jahnke, Kroll 2001, S. 145.

ist nicht nur anschaulich, sondern auch plausibel. Eine eigenständige, fundierte Bewertung kann durchaus Anforderungsbereich III zugeordnet werden.

Argumentationen in Form von einfachen Schlüssen bis hin zu umfangreichen Begründungen sind auch innerhalb der Ausführungen zu den ersten beiden Teilaufgaben zu erwarten. Die Aufgabe bietet daher reichhaltige Gelegenheit zur Förderung der Kompetenz des mathematischen Argumentierens. Da keine Forderungen an die Stringenz der Argumentation (wie z. B. „Beweise“) gestellt werden, ist eine starke Differenzierung bezüglich der Stringenz, des Umfanges, aber auch der Gestaltung und Darstellung der Argumentation möglich.

K6 Kommunizieren

Wird die Aufgabe schriftlich gelöst, äußert sich die Kompetenz des Kommunizierens vor allem in der Darstellung des Lösungsweges. Diese ist, insbesondere bei einem induktiven Vorgehen, durchaus anspruchsvoll. Die Schüler müssen zunächst Einzelfälle betrachten und geeignet gruppieren. Davon ausgehend sind Verallgemeinerungen zu treffen. Dabei spielt die Darstellung eine wesentliche Rolle. Sie kann umfangreiche Argumentationen ersetzen.

Insgesamt ist die Darstellung, verbal oder formal, dann geeignet, wenn der Lösungsweg nachvollzogen werden kann, keine Fragen zum Vorgehen offen bleiben. Übersicht ist zu bewahren (es gibt drei Teilaufgaben, verschiedene Münzsysteme sind zu betrachten). Fachsprachliche und umgangssprachliche Sequenzen sollten korrekt und verständlich sein.

Das zielorientierte schriftliche Präsentieren komplexer mathematischer Sachverhalte entspricht Anforderungsbereich III.

Die Aufgabe bietet sich auch zur gemeinsamen Reflexion an. Hier können Zusammenhänge (wieder-)entdeckt werden, die über die Lösung der Aufgabe hinaus gehen (z. B. „Sind zwei Zahlen durch eine Zahl teilbar, so sind auch ihre Summe und ihre Differenz durch diese Zahl teilbar.“). Auch über Verallgemeinerungen kann diskutiert werden: Wie müssen die Werte von zwei Münzsorten gewählt werden, damit alle Beträge erreicht werden? Durch eine mündliche Darstellung verschiedener Lösungswege kann das Erläutern und Beschreiben von Lösungsstrategien für andere sowie das „laute“ Argumentieren und Bewerten geübt werden. Insbesondere bietet sich eine Diskussion zur dritten Teilaufgabe an.

Gedanken zur Unterrichtsgestaltung

- Das induktive Vorgehen, bei dem Einzelfälle betrachtet, analysiert und davon ausgehend allgemeine Zusammenhänge formuliert werden, ist nicht nur zur Lösung dieser Aufgabe sehr geeignet. Es sollte im Mathematikunterricht gepflegt und dieser sollte nicht auf ein deduktives Vorgehen beschränkt werden. Induktive und deduktive (allgemeine Beweise und Herleitungen) Methoden sollten sich im Unterricht ergänzen, ihre Vor- und Nachteile und wichtige Einsatzbereiche sollten den Schülern deutlich werden.
- Die Aufgabe fordert eine Stellungnahme zu unserem Münzsystem. Eine willkürliche Bewertung wie „Finde ich besser.“ ist dafür nicht ausreichend. Es sind nachvollziehbare und stichhaltige Argumente auszuwählen und auszuführen. Anregungen können durch eine Sequenz echter oder vorgestellter Handlungen des Bezahlens und Herausgebens gewonnen werden.
- Die Aufgabe bietet Anlass den Euklidischen Algorithmus zu thematisieren, was in differenzierenden Unterrichtsformen zur Förderung leistungsstarker Schüler genutzt werden

kann. Eine weitere anspruchvolle Fortführung der Aufgabe ist in Herget, Jahnke, Kroll 2001, S. 37 zu finden.

7. Schnell ist nicht gleich schnell

Tom und Franz (9. Klasse) trainieren für einen Wettkampf im 100 m - Lauf, bei dem einer von beiden die Schule vertreten soll. Die Tabelle enthält ihre Trainingszeiten.

Lauf	1	2	3	4	5	6
Tom	13,2 s	13,4 s	13,0 s	12,8 s	12,8 s	12,9 s
Franz	12,9 s	13,4 s	12,5 s	13,0 s	13,6 s	12,9 s

a) Stelle die Daten graphisch dar.

b) Wen würdest du als Vertreter der Schule zum Wettkampf schicken? Lege deinen Lösungsweg dar und begründe deine Entscheidung.

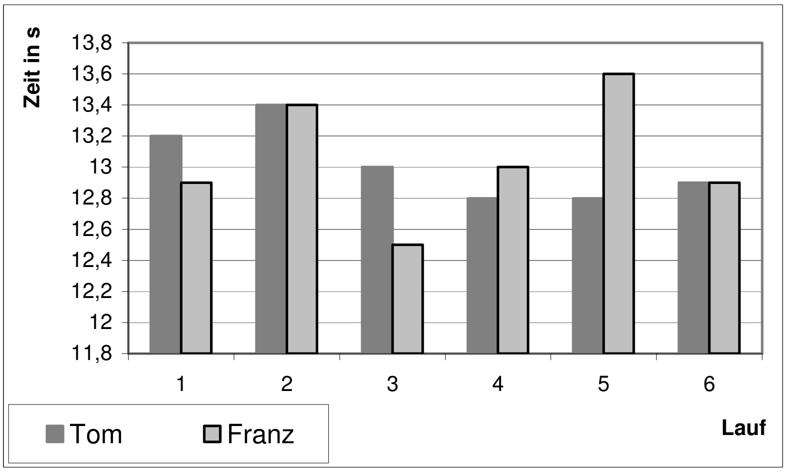
c) Für den 5000 m - Lauf kommt Kai oder Paul in Frage. Auf welcher Basis würdest du als Trainer die Entscheidung hier treffen?

Jahrgangsstufen	7/8 (P2 7/8) und 9/10 (P3 9/10)
Leitidee	Daten und Zufall
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch argumentieren, mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Angesprochene mathematische Inhalte	Mittelwert, Streuung (intuitiver Begriff), Darstellung von Daten

Zu 7. Schnell ist nicht gleich schnell

Möglicher Lösungsweg

a)



	Mittelwert	kleinster Wert	größter Wert
TOM	13,02 s	12,8 s	13,4 s
FRANZ	13,05 s	12,5 s	13,6 s

b) Die Entscheidung, wer zum Wettkampf fahren soll, ist nicht einfach zu fällen. Die Mittelwerte beider Läufer liegen sehr eng beieinander. Tom läuft im Mittel etwas schneller als Franz. Franz erreicht mit Abstand die beste Zeit, hat aber ebenso auch einen deutlichen Ausrutscher hin zu schlechteren Zeiten. Insgesamt sind die Schwankungen zwischen Toms Laufzeiten geringer als die von Franz. Außerdem geht bei Tom die Tendenz anscheinend zu kürzeren Laufzeiten. Bei Franz ist eine solche Entwicklung (noch) nicht erkennbar. Aus diesen Gründen sollte Tom dieses Jahr zum Wettkampf fahren.

Bei dieser Entscheidung wird jedoch davon ausgegangen, dass die gegebenen Laufzeiten zufällig sind. Gibt es eine Systematik, z. B. Franz ist immer morgens schneller, könnte dies auf die Entscheidung Einfluss haben.

c) Die 5000 m sollten Kai und Paul gleichzeitig laufen und der schnellere von beiden sollte zum Wettkampf fahren. Bei langen Strecken sollte bereits bei einem Lauf eine deutliche Zeitdifferenz zwischen beiden Läufern sichtbar werden. Bei Langstreckendistanzen sind vor allem Ausdauer und Kraft wichtig, weniger andere Bedingungen wie ein guter Start (kurze Reaktionszeit). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweiter Trainingslauf über 5000 m bei ähnlich Bedingungen genauso ausgeht, ist deshalb größer als bei 100 m, es sei denn, die Kondition der Läufer ändert sich, z. B. im Falle einer Krankheit.

Zu 7. Schnell ist nicht gleich schnell

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Als Grundlage und Unterstützung der Argumentation kann eine graphische Darstellung der Trainingszeiten dienen. Dafür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, z. B. das Säulendiagramm. Aber auch bei der Wahl dieser Darstellungsform kann noch entschieden werden, ob die Werte für beide Läufer in einem Diagramm oder getrennt dargestellt werden. Bei der getrennten Darstellung sind die Streuungen der Werte gut erkennbar, bei der gemeinsamen Darstellung ist ein Vergleich der Werte besonders gut möglich.

Die Graphik ist geeignet zu beschriften, ggf. ist eine Legende und eine Überschrift einzufügen, insbesondere dann, wenn die Graphik wie hier am PC, z. B. mit Excel, angefertigt wird.

Je nachdem wie vertraut die Schüler mit dieser oder einer anderen geeigneten Darstellungsweise sind, können die Anforderungen bezüglich dieser Kompetenzgruppe stark differieren: von der Anfertigung vertrauter und geübter Darstellungen (Bereich I) bis hin zur Entwicklung eigener Darstellungen (Anforderungsbereich III).

K1 Mathematisch argumentieren

Die Schüler haben zu entscheiden, welchen der beiden Jungen sie zum Wettkampf schicken und dies zu begründen. Die Grundlage der Entscheidung sollte der Mittelwert und die Schwankung der Trainingszeiten sein. Eine sichtbare Tendenz kann diese stützen. Die Entscheidung ist dabei nicht eindeutig. Je nach Interpretation der mathematischen Daten und der persönlichen Schwerpunktsetzung kann die Entscheidung für Tom oder Franz ausfallen. Wichtig ist eine plausible Begründung. Diese erfolgt in der Sprache des Kontextes, sollte sich aber auf die genannten mathematischen Ergebnisse stützen und den Vergleich und die Analyse der gegebenen Zeiten einbeziehen. So kann die Begründung eine (interessante) Mischung zwischen individuellen Auffassungen und mathematisch-rationalen Analysen sein.

Bei der Diskussion des Verfahrens zur Entscheidungsfindung bei der 5000 m - Stecke können keine formalen mathematischen Ergebnisse genutzt werden. Hier müssen die Bedingungen zwischen beiden Wettkämpfen verglichen und wesentliche Unterschiede herausgestellt werden. Daraus können Folgerungen auf die zu erwartenden Schwankungen der Trainingsergebnisse abgeleitet werden. Wenn auch die Ergebnisse sich gleichen sollten (Die Langstrecke auch sechsmal laufen zu lassen, wird hoffentlich nicht in Betracht gezogen.), können die Argumente der Begründung unterschiedlich sein.

Die überschaubare mehrschrittige Argumentation ist dem Anforderungsbereich II zuzuordnen. Es kann aber auch dazu kommen, dass die eigene Argumentation bzw. die Argumentationsbasis bewertet wird, was dem Anforderungsbereich III entspricht.

K3 Mathematisch modellieren

Mit dieser Aufgabenstellung werden alle Aktivitäten eines Modellierungsprozess angesprochen. Zur Beantwortung der außermathematischen Fragestellung ist ein geeignetes mathematisches Modell auszuwählen (hier Mittelwert und Differenz zwischen Maximal- und Minimalwert als Ausdruck der Schwankung der Werte). Innerhalb des mathematischen Modells wird ein formales Ergebnis bestimmt. Schließlich sind die formalen Ergebnisse wieder im Ausgangskontext zu interpretieren und auch eine Validierung des verwendeten Konzeptes ist durchaus denkbar.

Ein mathematisches Modell wird durch die Aufgabenstellung nicht benannt. Im Herstellen der Zusammenhänge zwischen mathematischen Elementen und solchen des Kontextes sowie im Entwickeln einer geeigneten Argumentationsbasis liegen die heuristischen Anforderungen dieser Aufgabenstellung.

Können die Schüler zum Zeitpunkt dieser Aufgabenstellung sicher mit dem Mittelwert umgehen und kennen sie seine Anwendungsbereiche, wird ein vertrautes und direkt erkennbares Modell genutzt (Anforderungsbereich I).

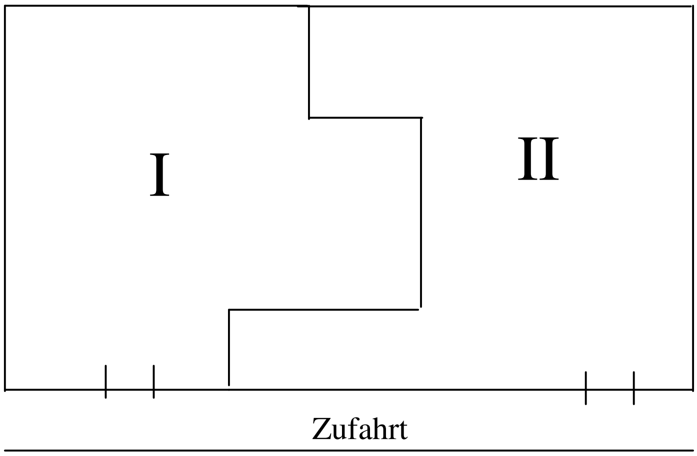
K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Der formale Anteil dieser Aufgabe liegt in der Bestimmung der Mittelwerte der Zeiten beider Läufer. Damit liegt in der Regel ein Routineverfahren vor, also Anforderungsbereich I. Die Berechnung hat hier lediglich Werkzeugcharakter, indem die Grundlage für die Argumentation geschaffen wird.

Gedanken zur Unterrichtsgestaltung

- Die Nicht-Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe und die Notwendigkeit einer einleuchtenden Begründung sollte innerhalb der Reflexion explizit thematisiert werden. Dazu können unterschiedliche Entscheidungen der Schüler diskutiert werden. Die Schüler lernen dabei mathematische Ergebnisse als Grundlage von Entscheidungen kennen, aber auch den Spielraum, den diese lassen.
- Die Aufgabe kann ganz am Anfang der Beschäftigung mit statistischen Kennwerten stehen (Jahrgangsstufen 7/8). Der Mittelwert kann so problemorientiert eingeführt werden. An späterer Stelle kann anhand desselben Problems ein Maß für die Streuung entwickelt werden.
- Innerhalb einer Modifikation der Aufgabenstellung kann mit authentischen Daten, mit Laufzeiten der Schüler selbst gearbeitet werden. Die Frage „Wer ist der schnellste Läufer“ ist dann möglicherweise gar nicht mehr ganz schnell zu beantworten; bedeutet sie „Wer hat die beste Minimalzeit?“ oder „Wer hat den besten Mittelwert?“ oder ... .
- Wie bereits angedeutet, kann die graphische Darstellung mittels Excel erfolgen. Ist dies möglich, können die Schüler auch verschiedene sinnvolle Darstellungsmöglichkeiten verwenden und vergleichen. Die Aufgabe kann also auch zum Anlass genommen werden, sich möglicherweise erstmalig mit einem Tabellenkalkulationsprogramm wie Excel zu beschäftigen. Neben der Darstellung der Werte kann auch der Mittelwert, später die Standardabweichung durch das Programm berechnet werden. Wirklich lohnend ist der Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen natürlich erst bei größeren Datenmengen.

8. Begradigung



Maßstab
1 : 400

Die Skizze zeigt die Grundstücke von Familie Stengel (I) und Familie Heiner (II) im Maßstab 1:400. Beide Familien wollen Einfamilienhäuser bauen. Die Grundstücke sind dafür jedoch ungünstig geschnitten. Die Eigentümer einigen sich auf eine Begradigung der Grenze zwischen beiden Grundstücken, ohne dass die Flächengrößen geändert werden.

a) Wo könnte die begradigte Grenze liegen? Gibt es mehrere Möglichkeiten?

b) Wie wirkt sich die Begradigung auf die Zaunlängen der beiden Nachbarn aus, wenn davon ausgegangen wird, dass das gemeinsame Zaunstück von beiden Nachbarn zur Hälfte errichtet wird. Ist die Veränderung gegenüber der Ausgangslänge erheblich?

Beide Bauherren haben bei der Planung ihres Hauses die Vorgabe des Bauamtes zu berücksichtigen, jeweils 3 m Abstand zur Grundstücksgrenze einzuhalten.

c) Welche wirkliche Baufläche steht den beiden Bauherren zur Verfügung? Ist die „Einschränkung“ beträchtlich?

d) Skizziere einen möglichen Standort für die beiden Häuser.

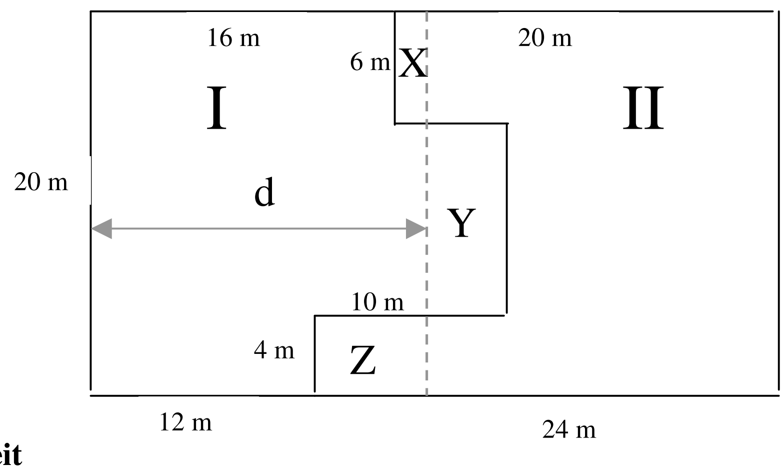
Klassenstufen	7/8[13] und 9/10 (P2 9/10)
Leitidee	Messen, Raum und Form, Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mit mathematischen Darstellungen arbeiten, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren
Angesprochene mathematische Inhalte	Maßstab, Flächenberechnung von Vierecken, Prozentrechnung

[13] Maßstäbliche Abbildungen gehören zu den Inhalten der Jahrgangsstufen 9/10 (Thema Ähnlichkeit). Die Schüler haben zum Thema „Maßstab“ jedoch Vorkenntnisse aus dem Sachunterricht der Grundschule, aus anderen Fächern oder dem außerschulischen Umfeld. Deshalb sollte die Aufgabe bereits in den Jahrgangsstufen 7/8 und früher erfolgreich bearbeitet werden können.

Zu 8. Begradigung

Mögliche Lösungswege

a) Begradigung (ohne Änderung der Flächengrößen)



1. Möglichkeit

Die Flächengrößen bleiben erhalten, wenn bei beiden Grundstücken die „abgeschnittene“ Fläche gleich groß der „hinzugefügten“ ist. Werden diese Teilflächen wie in der Skizze dargestellt mit X, Y, Z bezeichnet, bedeutet dies $X + Z = Y$.

Ist d der Abstand der begradigten Grenze wie in der Skizze eingetragen und verläuft die neue Grenze rechtwinklig zu den Grundstücksgrenzen, ergeben sich folgende Gleichungen. (Alle Zahlenwerte entsprechen Längen. Auf die Einheit Meter wurde verzichtet.)

i) $X = 6\ (d - 16) = 6d - 96$

ii) $Y = 10\ (22 - d) = 220 - 10d$

iii) $Z = 4\ (\ d - 12) = 4d - 48$

Aus diesen Gleichungen und der Bedingung $X + Z = Y$ kann der Abstand d bestimmt werden: $6d - 96 + 4d - 48 = 220 - 10d$. Es ergibt sich ein Originalabstand von $d = 18{,}2$ m. Dem entspricht in der maßstabsgerechten Zeichnung ein Abstand von ca. 4,6 cm.

2. Möglichkeit:

Zunächst wird die Fläche des Grundstücks von Familie Stengel berechnet:

$$F_I\ = 12\ \text{m} \times 20\ \text{m} + 10\ \text{m} \times 10\ \text{m} + 1\ \text{m} \times 1{,}5\ \text{m} = 364\ \text{m}^2$$

Verläuft die Grenze nach der Begradigung rechtwinklig zu den Grundstücksgrenzen, sind beide Grundstücke (annähernd) rechteckig. Der Abstand d der begradigten Grenze (siehe Skizze) ergibt sich dann aus der unveränderten Flächengröße und der Breite (20 m) des Grundstückes von Familie Stengel: $d = \dfrac{F_I}{20\ \text{m}} = 18{,}2\ \text{m}$.

zu beiden Möglichkeiten

Für die Begradigung gibt es mehrere Möglichkeiten, denn der Winkel zwischen der neuen Grenze und der vorhanden Grundstücksgrenze muss nicht 90° sein. Die Berechnung der Lage wird dann etwas schwieriger, da die abgetrennten Teilflächen keine Rechtecke mehr sind. Die Lage der Grenze wirkt sich auch auf die Zaunlängen aus.

b) Zaunlängen

Ursprüngliche Zaunlängen

$L_{I}^{alt} = 20 \text{ m} + 16 \text{ m} + \frac{1}{2}$ (6 m + 6 m + 10 m +10 m +4 m) + 12 m = 66 m

$L_{II}^{alt} = 20 \text{ m} + 20 \text{ m} + \frac{1}{2}$ (6 m + 6 m + 10 m +10 m +4 m) + 24 m = 82 m

Zaunlängen nach Begradigung

$L_{I}^{neu} = 20 \text{ m} + 2 \times 18{,}2 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 20 \text{ m} = 66{,}4 \text{ m}$

$L_{II}^{neu} = 20 \text{ m} + 2 \times 17{,}8 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 20 \text{ m} = 56{,}6 \text{ m}$

Damit erhöht sich die Zaunlänge für Familie Stengel um unerhebliche 0,6 % (0,4 m) von der Ausgangslänge. Für Familie Heiner verringert sich die Zaunlänge jedoch um 20 % (16,4 m). Beim Bauen des Zaunes kann Familie Heiner somit deutlich sparen. Insgesamt verringet sich die Zaunlänge um 16 m bzw. um 14,3 % von der Ausgangslänge.

c) Bauflächen

Grundstück I (Familie Stengel)

$F_{I}^{Bau} = (18{,}2 \text{ m} - 6 \text{ m})\,(20 \text{ m} - 6 \text{ m}) = 170{,}8 \text{ m}^2$

Die tatsächliche Baufläche beträgt bei Grundstück I ca. 47 % der Gesamtfläche.

Grundstück II (Familie Heiner)

Zunächst wird die Grundstücksfläche von Familie Heiner berechnet.

Gesamtfläche (beide Grundstücke): $F_G = 36 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 720 \text{ m}^2$

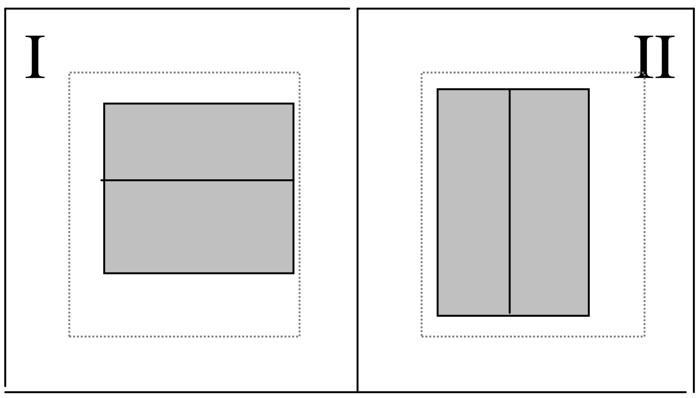
$F_{II} = F_G - F_I$, $F_{II} = 720\, m^2 - 364\, m^2 = 356\, m^2$

Baufläche: $F_{II}^{Bau} = (17{,}8 \text{ m} - 6 \text{ m})\,(20 \text{ m} - 6 \text{ m}) = 165{,}2 \text{ m}^2$

Die tatsächliche Baufläche beträgt bei Grundstück II ca. 46 % der Gesamtfläche. Beiden Familien steht somit nur etwa die Hälfte der Grundstücksfläche zur Bebauung zur Verfügung – eine deutliche Einschränkung.

d) Standorte

Übliche Grundflächen für Einfamilienhäuser mit zwei Geschossen sind z. B. 10 m × 9 m (2,5 cm × 2,25 cm im Maßstab 1:400) oder 12 m × 8 m (3 cm × 2 cm im Maßstab 1: 400)[14]. Eine mögliche Variante für die Standorte beider Häuser:



[14] Angaben für reale Hausgrößen sind von den Schülern aus Quellenmaterialien zu entnehmen. Auch das ist eine Aktivität, die zur Leitidee Messen gehört. Wenn es möglich ist, könnten aber auch Einfamilienhäuser selbst ausgemessen oder Bekannte befragt werden.

Zu 8. Begradigung

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Von den Schülern wird die Kompetenz gefordert, maßstäbliche Zeichnungen lesen und anfertigen zu können. Für die Bestimmung von Längen und Flächen ist die Skizze auszumessen und die Werte sind in die Originalgröße umzurechnen. Umgekehrt sind die Bildlängen zu bestimmen, z. B. um mögliche Standorte der Häuser eintragen zu können.

Sind die Schüler im Umgang mit maßstäblichen Zeichnungen geübt, liegt bezüglich dieser Kompetenz Anforderungsbereich I vor.

K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Zur Flächenberechnung sind von den Schülern selbständig geeignete Teilflächen zu bilden, entsprechende Flächeninhaltsformeln auszuwählen und anzuwenden. Dazu sind Umrechnungen anhand des gegebenen Maßstabs erforderlich. Gegebenenfalls müssen auch Einheiten umgerechnet werden. Zur Bestimmung der begradigten Grenze können einfache Termumformungen notwendig werden. Variablen sind dazu sinnvoll auszuwählen und einzusetzen. Während der gesamten Bearbeitung werden immer wieder Übersetzungen zwischen der symbolischen, formalen Sprache und der natürlichen Sprache des Kontextes notwendig. Die Schüler wählen selbständig mathematische Hilfsmittel wie Formelsammlungen und Taschenrechner und setzen diese ein.

Da Routineanforderungen nur einen Teil der vielfältigen genannten Aktivitäten des Arbeitens mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik ausmachen, liegt Anforderungsbereich II vor.

K2 Probleme mathematisch lösen

Von den Schülern ist eine Lösungsstrategie zu entwickeln, mit der die Lage der begradigten Grenze bestimmt werden kann. Der Ansatz der beiden vorgestellten Lösungsmöglichkeiten ergibt sich aus der Bedingung, die Flächengrößen beider Grundstücke nicht zu verändern. Insbesondere die Frage nach weiteren Möglichkeiten bedingt die Verknüpfung unterschiedlicher Unterrichtsthemen (Rechteck, Trapez, rechtwinkliges Dreieck etc.).

Die Bestimmung der Zaunlängen und der tatsächlichen Bauflächen sind für die Schüler der Sekundarstufe I Routineanforderungen, ohne heuristische Herausforderungen.

Für die letzte Teilaufgabe, den Vorschlag für einen möglichen Standort beider Häuser, ist erneut kreatives Denken (innerhalb eines gegebenen Rahmens) notwendig: Wie könnten die Häuser stehen? Was ist sinnvoll?

Verwenden die Schüler selbständig heuristische Strategien und Hilfsmittel liegt Anforderungsbereich II vor. Haben sie dagegen bereits ähnliche „Begradigungsaufgaben“ ausgeführt, liegt kein Problemlöseprozess mehr vor.

K3 Mathematisch modellieren

Die Kompetenz des mathematischen Modellierens ist bei dieser Aufgabe eng gekoppelt an die Kompetenz des Problemlösens. Die Auswahl eines geeigneten mathematischen Modells entspricht dem Entwickeln eines Ansatzes, also der heuristischen Anforderung.

Wichtige Aktivitäten des Bereiches „mathematisch modellieren" kommen vor allem in der letzten Teilaufgabe zum Einsatz. Wie groß ist die Grundfläche von Einfamilienhäusern? Die Schüler dürften hierzu wenig Wissen besitzen und sind daher aufgefordert, selbständig nach notwendigen Daten zu recherchieren, wofür das Internet eine geeignete Quelle sein könnte.

An zwei Stellen werden die Schüler angeregt ihre mathematischen Ergebnisse zu interpretieren: Sind die Veränderungen erheblich? Sind die Einschränkungen deutlich? Die bestimmten Werte sind dabei geeignet in Beziehung zu setzen und Schlussfolgerungen zu ziehen.

Je nach Vertrautheit der Schüler mit Aktivitäten des Modellierens liegt Anforderungsbereich I oder II vor.

Gedanken zur Umsetzung im Unterricht

- Die Aufgabe bietet die Möglichkeit Ausschnitte aus der Lebenswelt in den Mathematikunterricht aufzunehmen und zwar in einer Form wie sie von den Schülern selbständig und im zeitlichen Rahmen einer Unterrichtsstunde bewältigt werden kann. Da alle inhaltlichen Voraussetzungen durch den Grundschulunterricht gegeben sein sollten, kann der Schwerpunkt auf die allgemeinen Kompetenzen wie das Übersetzen in eine mathematische Darstellung oder das Sammeln notwendiger Informationen gelegt werden.
- Anhand der Aufgabe können die Schüler, möglicherweise erstmals, mit bestimmten Aktivitäten des Modellierens und Problemlösen vertraut gemacht werden. In diesem Fall ist eine Reflexion und Diskussion unterschiedlicher Herangehensweisen von besonderer Bedeutung. Sind die Schüler in der selbständigen Bearbeitung komplexer Aufgabenstellungen wenig geübt, können sich Phasen im Klassenverband mit Phasen der selbständigen Arbeit abwechseln. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die Schüler nur notwendige Denkanstöße erhalten und nicht die Problemstellung durch ein gelenktes Unterrichtsgespräch zu Routineanforderungen reduziert wird.
- Findet die Bearbeitung der Aufgabe innerhalb der Themenstellung „Maßstab" in Klasse 9 statt, könnten im Unterricht auch reale Bauzeichnungen gelesen und verwendet werden.
- Die Aufgabe wird anspruchsvoller, wenn die begradigte Grenze aufgrund vorhandener Bebauungen oder Bepflanzungen schräg gelegt werden muss. Auch der Zusammenhang zwischen Lage der Grenze und Zaunlänge (Gesamtlänge) kann tiefer analysiert werden.
- Ausgehend von dieser Aufgabe können die Schüler aufgefordert werden, eigene Begradigungsaufgaben zu erfinden und diese, z . B. im Austausch mit dem Nachbarn auch zu lösen. Dabei sollte die Kreativität nur so weit getrieben werden, dass es sich noch um real mögliche Situationen handelt.

9. Alles ganz normal?

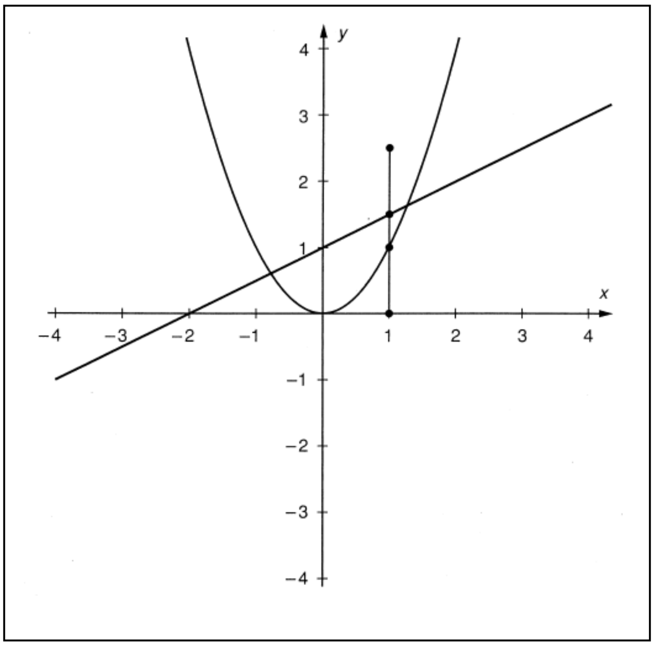


Abbildung aus Herget, Jahnke, Kroll 2001, S. 98

Die Abbildung zeigt die Normalparabel zu $y = x^2$ und die Gerade zu $y = \frac{1}{2}x + 1$. An der Stelle x = 1 wurden die y-Werte der Geraden und der Parabel addiert (graphische Addition).

a) Führe die graphische Addition an weiteren Stellen aus. Was für ein Graph entsteht? Beschreibe ihn. Wie lautet die zugehörige Gleichung?
   Ist die Summe aus einer Geraden und einer Parabel immer ein solcher Graph? Begründe deine Vermutung.

b) Was für ein Graph entsteht, wenn eine Gerade von einer Parabel „abgezogen“ wird?

c) Welche Graphen können entstehen, wenn zu einer Parabel eine andere Parabel addiert oder subtrahiert wird? Betrachte unterschiedliche mögliche Fälle (z. B. Addition einer Parabel mit entgegengesetztem quadratischen Anteil).

Quelle	Modifikation der gleichnamigen Aufgabe von W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen, S. 98
Jahrgangsstufen	9/10
Leitidee	Funktionaler Zusammenhang
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch argumentieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Angesprochene mathematische Inhalte	Normalparabel, Addition und Subtraktion von Funktionsgraphen, Verschiebung, Scheitelpunkt, Fallunterscheidung

Zu 9. Alles ganz normal?

Mögliche Lösung

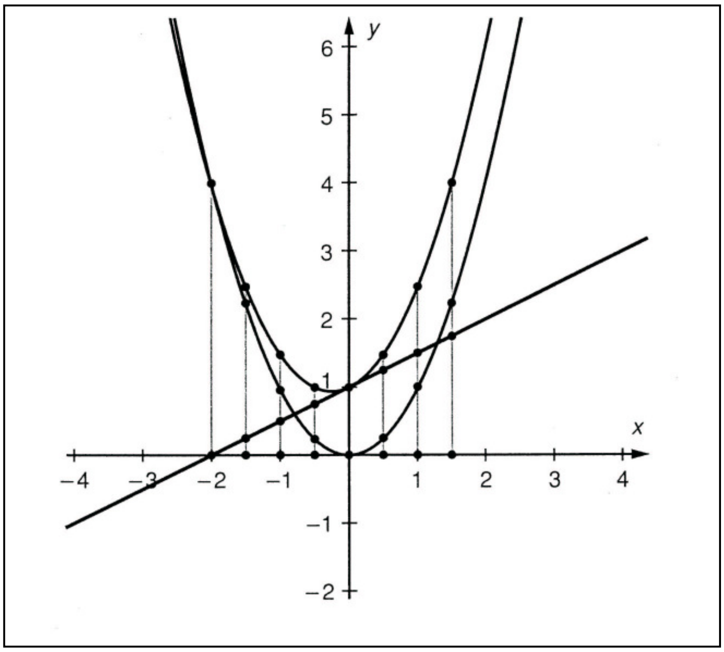


Abbildung aus Herget, Jahnke, Kroll 2001, S. 189

a) Bei der graphischen Addition entsteht wieder eine Parabel. Der Scheitelpunkt der neuen Parabel ist jedoch nach oben und links verschoben.

Funktionsgleichung: $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Scheitelpunktsform: $y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$

Scheitelpunkt: $P_S = \left(-\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right)$

Allgemeine Betrachtung (normierter Fall):

$y_1 = x^2$

$y_2 = ax + b$

$y_1 + y_2 = x^2 + ax + b$

→ Werden eine quadratische und eine lineare Funktion addiert, entsteht immer eine quadratische Funktion, weil der quadratische Anteil unverändert bleibt. Der lineare Anteil verschiebt den Scheitelpunkt. Der Graph, welcher bei der Addition einer Parabel und einer Geraden entsteht, ist somit immer eine Parabel.

b) Wird eine Gerade von einer Parabel „abgezogen“, entsteht ebenfalls eine (möglicherweise) verschobene Parabel.

Wird beispielsweise $\frac{1}{2}x+1$ von x^2 abgezogen, verschiebt sich der Scheitelpunkt nach rechts und nach unten.

Funktionsgleichung: $y = x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

Scheitelpunktsform: $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}$

Scheitelpunkt: $P_S = \left(\frac{1}{4}, -\frac{17}{16}\right)$

allgemein: $y_1 - y_2 = x^2 - ax - b$

c) Wird zu einer Parabel eine andere Parabel addiert oder subtrahiert, können verschiedene Fälle auftreten.

1. Fall: Addition zweier Parabeln:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = x^2 + cx + d$ $\quad y_1 + y_2 = 2x^2 + (a+c)x + (b+d)$

Der Graph der Summe ist eine gestreckte und verschobene Parabel.

2. Fall: Addition einer Parabel mit entgegengesetztem quadratischen Anteil:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = -x^2 + cx + d$ $\quad y_1 + y_2 = (a+c)x + (b+d)$

Es entsteht eine Gerade.

3. Fall: Addition einer Parabel mit entgegengesetztem linearen Anteil:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = x^2 - ax + d$ $\quad y_1 + y_2 = 2x^2 + (b+d)$

Die Summe ist eine gestreckte Parabel mit Scheitelpunkt auf der y-Achse.

4. Fall: Addition einer Parabel mit entgegengesetztem konstanten Anteil:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = x^2 + cx - b$ $\quad y_1 + y_2 = 2x^2 + (a+c)x$

Der Graph der Summe ist eine gestreckte und verschobene Parabel, die durch den Nullpunkt geht.

5. Fall: Addition einer Parabel mit entgegengesetztem quadratischen und linearen Anteil:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = -x^2 - ax + d$ $\quad y_1 + y_2 = (b+d)$

Es ergibt sich eine waagerechte Gerade.

6. Fall: Addition einer Parabel mit entgegengesetztem quadratischen und konstanten Anteil:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = -x^2 + cx - b$ $\quad y_1 + y_2 = (a+c)x$

Das Ergebnis ist eine Gerade durch den Nullpunkt.

7. Fall: Addition der „komplett entgegengesetzten“ Funktion:

$y_1 = x^2 + ax + b$, $y_2 = -x^2 - ax - b$ $\quad y_1 + y_2 = 0$

Auslöschung. Der Graph der Summe ist die x-Achse.

Zu 9. Alles ganz normal?

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Im ersten Abschnitt der Aufgabe wird mit den Schülern die graphische Addition zweier Funktionsgraphen erarbeitet. Dazu erhalten sie eine ihnen bekannte Darstellung: eine Parabel und eine Gerade im Koordinatensystem. Zusätzlich ist in die Graphik exemplarisch und skizzenhaft die graphische Addition an einer Stelle eingetragen. Dieses neue Element ist von den Schülern zu lesen, zu verstehen und zu interpretieren, damit sie anschließend die graphische Addition an weiteren Stellen selbst ausführen können. Schließlich soll die gesamte „Summenkurve" entstehen. Wie viele graphische Additionen dazu notwendig sind, entscheiden die Schüler. Das Verfahren der graphischen Addition ist den Schülern in der Regel noch nicht bekannt[15]. Sie verwenden vertraute Darstellungsmittel in einem neuen Zusammenhang (Anforderungsbereich II).

Für den dritten Abschnitt der Aufgabe wurde in der Beispiellösung die formale Darstellungsform gewählt, um dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit gerecht zu werden. Es ist jedoch denkbar, dass die Schüler hier exemplarisch-anschaulich, anhand von graphischen Beispielen argumentieren. Graphische Darstellungen können aber auch zusätzlich zur Veranschaulichung formaler Argumentationen, gewählter Beispiele und Sonderfälle eingesetzt werden. Des Weiteren werden Übersetzungen zwischen graphischen und formalen Darstellungen in beide Richtungen notwendig.

K1 Mathematisch argumentieren

Von den Schülern wird gefordert, ausgehend von der exemplarischen Addition einer Parabel und einer Geraden, eine allgemeine Vermutung aufzustellen und diese verbal oder formal zu begründen. Die verbale Argumentation kann anschaulich hervorheben, dass der quadratische Term die Entstehung einer Parabel bewirkt, während der zusätzliche lineare Anteil die Form nicht wesentlich beeinflusst. Die formale Argumentation kann sehr knapp erfolgen. Wichtig ist dabei die allgemeine Darstellung quadratischer und linearer Funktionen zu verwenden, um tatsächlich der Bedingung „immer" gerecht zu werden.

Es liegt eine überschaubare mehrschrittige Argumentation in verschiedenen mathematischen Darstellungsformen vor, was dem Anforderungsbereich II entspricht.

K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die wesentliche Anforderung in dieser Kompetenzgruppe ist das Arbeiten mit formalen bzw. symbolischen funktionalen Darstellungen in allgemeiner und konkreter Form. Verbal (in mathematischer Fachsprache) und graphisch gegebene Darstellungen von Funktionen sind zunächst in formal-symbolische Darstellungen zu übersetzen. Dazu sind geeignete Variablen auszuwählen und entsprechende Terme aufzustellen. Funktionen sind zu addieren und zu subtrahieren, was auf formaler Ebene mit Termumformungen bis zu einer geeigneten Darstellung

[15] Möglicherweise haben die Schüler bereits im Physikunterricht in Zusammenhang mit der Erarbeitung des Resonanzbegriffs (P2 9/10) graphisch-anschaulich Sinusfunktionen addiert.

verbunden ist. Formale Darstellungen sind zielgerichtet ineinander zu überführen, häufig unter Anwendung der quadratischen Ergänzung.

Eine mechanische Anwendung von Routineoperationen ist hier nicht ausreichend. Die Schüler müssen zielgerichtet geeignete formale Darstellungen und Operationen auswählen und umsetzen. Die Darstellungen unterstützen wesentlich die Argumentation und ersetzen ausführliche verbale Darlegungen. Sie sollten deshalb so gestaltet sein, dass die wichtige Aussage sofort erkennbar ist. Dieser Anspruch an die formalen Elemente innerhalb dieser Aufgabe führt zu einer Überschneidung mit Aktivitäten der Bereiche des Kommunizierens, Problemlösens, Darstellens und Argumentierens. Je nachdem wie vertraut die Schüler mit diesen Anforderungen sind, liegt Anforderungsbereich II oder III vor.

Gedanken zur Unterrichtsgestaltung

- Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe werden in besonderem Maße verschiedene mathematische Darstellungsebenen einbezogen. Die fachsprachlich-verbale Ebene, die graphische Ebene und die formal-symbolische Ebene ergänzen und unterstützen sich, ebenso exemplarische (konkrete Beispiele) und allgemeine Darstellungen. Für die Schüler sollte deutlich werden, wie die verschiedenen Darstellungsebenen als Grundlage und Veranschaulichung von Argumentationen und Problemlösungen dienen können.
- Die systematische Fallunterscheidung zur Untersuchung möglicher Fälle ist eine wichtige mathematische und heuristische Methode, sowohl für Argumentationen als auch für Problemlösungen. Sie sollte auch in der Sekundarstufe I demonstriert und selbständig ausgeführt werden. In diesem Sinne kann die Aufgabe veranlassen, dass die Schüler sich üben, Sonderfälle zu unterscheiden und zu analysieren. Ausgehend von einer intuitiven Herangehensweise kann innerhalb der Reflexion gemeinsam eine systematische und übersichtliche Fallunterscheidung (Ordnung und Analyse der Sonderfälle) entwickelt werden. Dabei muss nicht zwangsläufig die vorgestellte allgemeine Darstellung dominieren. Eine Analyse und Dokumentation der Sonderfälle auf exemplarischer Ebene kann in den Jahrgangstufen 9/10 ebenfalls akzeptiert werden. Wichtig ist, die Methode der systematischen Fallunterscheidung an sich kennen zu lernen bzw. anzuwenden.

10. Ein Quadrat um ein Quadrat

Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge *a*. Verlängere $\overline{AB}$ über *B* hinaus um sich selbst und nenne den Endpunkt *C´*. Verlängere $\overline{BC}$ über *C* hinaus um sich selbst und nenne den Endpunkt *D´*. Fahre so fort, indem du $\overline{CD}$ um sich selbst verlängerst bis *A´* und $\overline{DA}$ um sich selbst bis *B´*. Zeichne das Viereck *A´B´C´D´*.

a) Begründe, warum das Viereck *A´B´C´D´* ebenfalls ein Quadrat ist.

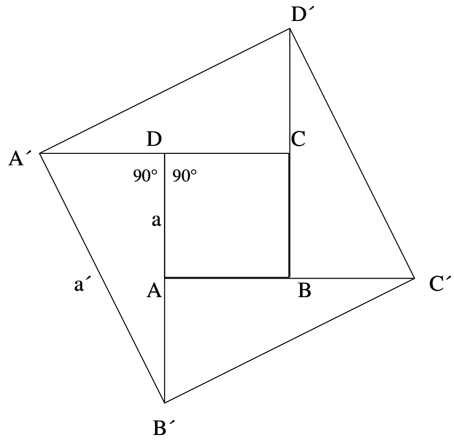
b) Bestimme den Flächeninhalt von *A´B´C´D´*.

c) Nun ist das Quadrat *A´B´C´D´* gegeben und das zugehörige Ausgangsquadrat *ABCD* soll rekonstruiert werden. Beschreibe eine Möglichkeit.

Quelle	Modifikation der Aufgabe „Quadrate vorwärts und rückwärts“ von W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen, S. 66
Jahrgangsstufen	9/10 (P2 9/10)
Leitidee	Raum und Form, Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematische Darstellungen verwenden, Probleme mathematisch lösen, mathematisch argumentieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Angesprochene mathematische Inhalte	Quadrat, rechtwinkliges Dreieck, Kongruenz, Winkel im Dreieck, Satz des Pythagoras

Zu 10. Ein Quadrat um ein Quadrat

Möglicher Lösungsweg



a) Nachweis der Behauptung „*A´B´C´D´* ist ebenfalls ein Quadrat“:

Zu zeigen 1.) Alle Seiten sind gleich lang: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'} = a'$.

2.) Alle Winkel sind rechte Winkel:

$\sphericalangle D'A'B' = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle C'D'A' = 90°$.

zu 1.) Die ausgeführte Konstruktion ist symmetrisch. An allen vier Ecken wurde das Quadrat *ABCD* auf gleiche Art und Weise erweitert. Die vier bei der Konstruktion entstandenen Dreiecke sind somit kongruent (Kongruenzsatz sws). Folglich gilt auch $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'} = a'$. Die vier Dreiecke sind rechtwinklig, da jeweils ein Innenwinkel ein Nebenwinkel zu einem der rechten Winkel des gegebenen Quadrates ist. Deshalb kann zur Bestimmung der Seitenlänge a´ der Satz des Pythagoras verwendet werden: $(a')^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow a' = \sqrt{5}a$.

zu 2.) Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt weiter $\sphericalangle D'A'C = \sphericalangle DB'A'$. Mit dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck folgt nun

$\sphericalangle B'A'D + \sphericalangle DB'A' = \sphericalangle B'A'D + \sphericalangle D'A'C = 180° - 90° = 90°$.

Dies gilt aufgrund der Symmetrie analog für die anderen vier Ecken. Somit sind alle vier Winkel im Viereck *A´B´C´D´* rechte Winkel. Da nach 1.) auch alle Seiten gleich lang sind, liegt ein Quadrat vor.

b) Berechnung[16] der Fläche von *A´B´C´D´*: $A = a'^2 = 5a^2$

c) Rekonstruktion von *ABCD* ausgehend von *A´B´C´D´* für *a´* = 6 cm:[17]

Lösungshinweis[18] aus Herget, Jahnke, Kroll 2001 (S. 164):

Eine Änderung von *a* bewirkt nur eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung. Man braucht daher nur den Winkel *DB´C´* zu messen und ihn zu übertragen. Man kann aber auch das Verhältnis der Seitenlängen von *ABCD* und *A´B´C´D´* benutzen.

[16] Auch wenn die Länge der Seite *a´* noch nicht bestimmt wurde, kann der Flächeninhalt von *A´B´C´D´* bestimmt werden (Herget, Jahnke, Kroll 2001): Die Fläche jedes der hinzugefügten Dreiecke ist a^2 - somit beträgt der gesuchte Flächeninhalt $5a^2$.

[17] Auf die Zeichnung wird hier verzichtet, da das Endprodukt der obigen Figur (andere Maße) entspricht.

[18] Die Autoren beschreiben für diesen Teil der Aufgabe weitere Lösungswege, z. B. mittels Ähnlichkeit.

Zu 10. Ein Quadrat um ein Quadrat

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Für die erste Figur ist zunächst ein Quadrat zu konstruieren. Die vier Seiten sind anschließend jeweils um den Betrag einer Seitenlänge zu verlängern. Die Figur *A´B´C´D´* entsteht dabei nicht (nur) durch den Schülern bekannte Konstruktionen, sondern eine schriftlich gegebene Anleitung zur Konstruktion ist zu verstehen und umzusetzen. Dieser Wechsel zwischen verbaler und graphischer Darstellungsform wird dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Bei der Rekonstruktion von *ABCD* wird eine eigene Darstellung entwickelt (Anforderungsbereich III), was auch heuristische Fähigkeiten erforderlich macht (z. B. vergleichende Analyse von Anfangs- und Zielfigur).

Die Kompetenz des Darstellens spiegelt sich in Korrektheit und Genauigkeit der Darstellung wider, wobei natürlich auch der Umgang mit Zeichengeräten von Bedeutung ist.

K1 Mathematisch argumentieren

Argumentative Kompetenzen werden gefordert bei der Begründung, warum *A´B´C´D´* ebenfalls ein Quadrat ist. Von den Schülern ist dafür zunächst zu erkennen, dass die Argumentation sich auf die beiden wesentlichen Eigenschaften eines Quadrates beziehen muss. Es ist zu begründen, dass alle Seiten gleich lang sind und dass alle entstandenen Winkel rechte Winkel sind. Die Stringenz der Argumentation wurde bewusst nicht durch die Aufforderung „zeige“ festgelegt, um den Schülern auf ihrem Niveau den Zugang zur Aufgabe zu erlauben. Die Begründung kann somit zunächst anschaulich erfolgen. Wichtig ist jedoch, dass die Argumente geordnet und verständlich dargelegt werden. Die Ausführungen sollten mathematisch richtig sein und aufeinander aufbauen.

Innerhalb einer Reflexion, möglicherweise auch innerhalb einer Gruppenarbeit, können die Argumente der Schüler präzisiert und zu einem Beweis in der üblichen Form geordnet werden. Da mit den in Klasse 9 vorhandenen mathematischen Mitteln ein exakter mathematischer Nachweis möglich ist, sollte er auch als Ziel dieser Aufgabenstellung angestrebt werden.

Bezüglich der Argumentation liegen Anforderungen im Bereich II vor.

K2 Probleme mathematisch lösen

Die Aufgabe ist in all ihren Teilaufgaben methodisch offen. Von der auszuführenden Argumentation über die Bestimmung des Flächeninhaltes bis zur Rekonstruktion werden durch die Angaben der Aufgabenstellung keine Lösungsmethoden benannt oder nahegelegt. Die Schüler haben für die einzelnen Teilaufgaben eigene Lösungsstrategien zu entwickeln, indem sie Verbindungen zwischen Lerninhalten unterschiedlicher Klassenstufen und Stoffgebiete herstellen (z. B. Kongruenzsätze, Satz des Pythagoras, Satz über die Winkelsumme im Dreieck etc.). Außerdem sind verschiedene heuristische Aktivitäten auszuführen: analysieren der geometrischen Strukturen und Eigenschaften einer vorliegenden (komplexen) Figur, vergleichen von Teilen der Figur und suchen von Zusammenhängen, ordnen der erkannten Beziehungen zu einer Argumentationskette.

Diese Anforderungen bezüglich des mathematischen Problemlösens werden dem Anforderungsbereich II zugeschrieben. Die Verwendung des Satzes von Pythagoras zur Bestimmung der Seitenlänge a' ist allerdings naheliegend, wenn die Aufgabe in zeitlicher Nähe mit der Behandlung dieses Satzes im Unterricht gestellt wird.

K5 Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen

Für den Nachweis, dass $A'B'C'D'$ ein Quadrat ist und für die Bestimmung der Fläche dieses Quadrates ist ein Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen hilfreich, bei einem Vorgehen ähnlich der Musterlösung sogar notwendig. Dabei kommen den Schülern vertraute Termumformungen und Berechnungen zum Tragen. Da die mathematischen Werkzeuge jedoch verständig und eigenständig ausgewählt und eingesetzt werden, liegen Anforderungen aus dem Bereich II vor.

Der Anteil formaler Aktivitäten an der Lösung der Aufgabe kann stark differieren, je nachdem ob eine formale oder eine verbal-begriffliche Argumentation geführt wird.

Gedanken zur Unterrichtsgestaltung

- Die Schüler werden mit einer ungewohnten Konstruktion konfrontiert, die sie nach verbalen Anweisungen auszuführen haben. Sie sollten es gewohnt sein, fachsprachliche Texte zu lesen und selbständig umzusetzen, was die Kenntnis der fachsprachlichen Begriffe und die Deutung der sprachlichen Strukturen einbezieht.
- Die in der Aufgabenstellung geforderte Argumentation kann möglicherweise den Schülern ein Erfolgserlebnis im eigenständigen Begründen verschaffen. Vielleicht gelingt einigen Schülern sogar ein exakter Beweis. Die mathematischen Mittel dazu sind in Klasse 9 gegeben. Anderenfalls können die Argumente der Schüler zusammen geprüft und zu einem vollständigen Beweis geordnet werden. Den Schülern kann so das Gefühl gegeben werden, wichtige Argumente selbst gefunden zu haben, die durch den Lehrer (nur noch) in die „richtige Form“ gebracht werden.
- Die Schüler können in Partnerarbeit überprüfen, ob ihre Wege der Rekonstruktion möglich sind und ob die Beschreibung geeignet ausgeführt wurde (Schüler 1 führt die Rekonstruktion von Schüler 2 aus und umgekehrt). So können sie wichtige Kriterien einer geeigneten Beschreibung selbst herausfinden und diskutieren.

11. Märchenhaft leicht – die Goldkugel

„Es war einmal ein König, der hatte vier Töchter.
Eine war schöner als die andere, aber die jüngste war die allerschönste ...“
So beginnt das Märchen vom Froschkönig.
Und die Jüngste war nicht nur die Schönste, sondern offensichtlich auch die Stärkste, denn „sie spielte mit ihrer goldenen Kugel, warf sie in die Luft und fing sie mit beiden Händen wieder auf“.

http://www.fln.vcu.edu/grimm/frosch_quiz.html

a) Wie schwer darf die Kugel sein, damit die Prinzessin sie noch fangen kann?
   Wie groß darf die Kugel dann sein?
b) War die Kugel vielleicht hohl?
   Wie dick darf dann die Wand sein?
c) Schwimmt dann die Kugel oder geht sie unter?

Quelle	W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen, S. 31
Jahrgangsstufen	9/10 (P7 9/10, P4 9/10)
Leitidee	Messen, Raum und Form, Zahl
Einbezogene allgemeine Kompetenzen	mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, kommunizieren
Angesprochene mathematische Inhalte	Kugelvolumen, Hohlkugel, Kubikwurzel
Angesprochene physikalische Inhalte	Masse, Dichte (P2 7/8), Auftrieb, hydrostatischer Druck (P1 9/10)

Zu 11. Märchenhaft leicht – die Goldkugel

Möglicher Lösungsweg

Dichte von Gold (Au): 19,28 g/cm³

a) Gefangen werden können sicherlich noch Kugeln von 2 kg und mehr. Um mit einem Ball spielen zu können, also ihn locker zu fangen und zu werfen, sollte dieser jedoch nicht mehr als 1 kg wiegen.

$$\rho = \frac{m}{V},\ m = \rho V,\ V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{1000g \cdot cm^3}{19{,}28g} \approx 51{,}87cm^3$$

Eine Goldkugel mit der Masse 1 kg hat ein Volumen von ca. 51,9 cm³.
Der Radius einer solchen Kugel wird aus der Formel für das Kugelvolumen bestimmt.

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3,\ r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 51{,}87cm^3}{4\pi}} = 2{,}31\,\text{cm}$$

Eine Goldkugel mit der Masse 1 kg hätte damit nur einen Radius von ca. 2,3 cm, wäre also recht klein (und schwer) und zum Spielen (Werfen und Fangen mit beiden Händen) weniger geeignet.
Besser wäre ein Radius von (mindestens) 5 cm. Eine solche Goldkugel wäre jedoch mit ca. 10,1 kg zum Spielen zu schwer.

b) Eine Hohlkugel mit dem Außenradius *r* und der Schalendicke *d* hat das Volumen $V_{HK} = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - (r-d)^3\right)$. Daraus ergibt sich nach einigen Umformungen für die Schalendicke der Zusammenhang $d = r - \sqrt[3]{r^3 - V_{HK} \cdot \frac{3}{4\pi}}$.
Mit dem gesetztem Goldvolumen von 51,9 cm³ (Gewicht 1 kg) und einem Außenradius von 5 cm ergibt sich eine Schalendicke von 1,7 mm. Die Wand der goldenen Hohlkugel müsste somit sehr dünn sein.

c) Die Hohlkugel befindet sich im Wasser. Ihre Gewichtskraft wirkt nach unten und gleichzeitig wirkt aufgrund des hydrostatischen Druckes eine Kraft nach oben, die der Gewichtskraft des verdrängten Wassers entspricht (Auftrieb). Für die Frage, ob die Hohlkugel untergeht, ist die Resultierende beider Kräfte maßgeblich.

Die goldene Hohlkugel mit dem Radius 5 cm verdrängt 523,6 cm^3 Wasser. Dem entspricht ($\rho_W = 1g/cm^3$) ein Gewicht von 523,6 g. Da die goldene Hohlkugel mit 1000 g jedoch fast doppelt so viel wiegt, geht sie tatsächlich unter.

Zu 11. Märchenhaft leicht – die Goldkugel

Förderung allgemeiner Kompetenzen

K3 Mathematisch modellieren

Die Aufgabe kann zu wichtigen Aktivitäten einer mathematischen Modellierung anregen. Um in das mathematische Modell „Kugelvolumen" überzugehen und mit diesem arbeiten zu können, muss zunächst geschätzt werden, wie schwer ein Ball sein darf, mit dem noch gespielt werden kann. Dazu könnten z. B. auch Bälle ausgewogen werden. Außerdem ist die notwendige Dichte von Gold nicht in der Aufgabenstellung gegeben, sondern von den Schülern aus dem Tafelwerk zu entnehmen.

Das mathematische Modell selbst (Kugelvolumen und Volumen einer Hohlkugel) wird in der Aufgabenstellung benannt. Die Formel für das Volumen einer Hohlkugel ist jedoch u. U. selbständig aufzustellen, was für die meisten Schüler anspruchsvoll sein sollte.

Zur Modellierung gehört auch, die formal erhaltenen Ergebnisse im Zusammenhang zu bewerten. Dabei kann z. B. argumentiert werden, dass eine Goldkugel von 2 cm Radius und 1 kg Gewicht weniger zum Spielen geeignet ist, was die Suche nach neuen Möglichkeiten einleitet.

Die letzte Teilaufgabe ist nicht mehr allein mit mathematischen Kenntnissen lösbar. Bei dieser fachübergreifenden Problemstellung muss physikalisches Wissen zum Auftrieb eingebracht werden. Hier werden die Schüler damit konfrontiert, dass in realen wie auch in märchenhaften Problemstellungen oft das Wissen mehrerer Fachgebiete zu verknüpfen ist. [19]

Aufgrund der Vielzahl selbständig auszuführender anspruchsvoller Aktivitäten des mathematischen Modellierens, der Verwendung wenig vertrauter Modelle und der Vernetzung von Inhalten mehrerer Fachgebiete werden die Anforderungen dem Bereich III zugeordnet. Die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist bei dieser Modellierungsaufgabe jedoch in besonderem Maße von inhaltlichen und methodischen Vorkenntnissen der Schüler abhängig.

K5 Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die Formel für das Kugelvolumen ist von den Schülern nach dem Radius aufzulösen, wobei die Anwendung der Kubikwurzel notwendig wird. Dies gehört u. U. (noch) nicht zu den Routineoperationen der Schüler. Nach den Aussagen von Herget, Jahnke und Kroll (2001, S. 141) kann bei der Lösung dieser Aufgabe jedoch sogar die Kubikwurzel selbständig entdeckt werden. Voraussetzung für eine solche Transferleistung ist jedoch der sichere Umgang mit Potenzen und Quadratwurzel.

Der Anspruch der algebraischen Operationen wird weiter erhöht bei der Entwicklung eines Ausdrucks für das Volumen einer Hohlkugel und bei dessen Umformung nach der Dicke der Kugelschale.

Weiterhin sind die Schüler gefordert, mit verschiedenen Einheiten zu rechnen und sie gegebenenfalls ineinander umzurechnen (z. B. kg in g). Schwierig dürfte dabei der Umgang mit der

[19] Das Thema „Auftrieb" steht im neuen Berliner Rahmenlehrplan Physik. Der interessante letzte Aufgabenteil sollte jedoch auch bearbeitet werden können, wenn die Auftriebskraft noch nicht im Physikunterricht thematisiert wurde. Erscheint es für die spezielle Schülergruppe zu schwierig, sich selbständig mit dem Thema zu befassen, kann ein entsprechender Einschub im Unterricht erfolgen. Das Einbeziehen realer Problemstellungen in den Mathematikunterricht bringt des öfteren das Problem mit sich, dass Wissen aus anderen Fachgebieten einbezogen werden muss, das teilweise (noch) nicht zur Verfügung steht. Dies kann als Anlass genutzt werden, fachübergreifend zu arbeiten. Möglich wäre hier auch ein kleines mathematisch-physikalisches Projekt.

Einheit der Dichte sein, da die Schüler hierzu evtl. (noch) wenige Erfahrungen aus dem Physikunterricht mitbringen.

Sind die Formeln umgestellt, werden Berechnungen notwendig, die zum einen Dezimalzahlen und zum anderen Potenzen bzw. Wurzeln bis zur dritten Potenz enthalten. Hier wird der sichere Umgang mit dem Taschenrechner wichtig, aber auch das sinnvolle Runden.

Aufgrund ihrer Komplexität und der geringen Gewohnheit werden die Anforderungen bezüglich dieser Kompetenzgruppe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

K6 Kommunizieren

Eine Aufgabe, die Aktivitäten eines Modellierungsprozesses enthält, stellt immer besondere Anforderungen an die Darstellung des Lösungsweges. Hier ist die Darlegung einer Rechnung nicht ausreichend. So werden bei dieser Aufgabe bereits innerhalb einer schriftlichen Bearbeitung folgende Aktivitäten der Kompetenzgruppe des Kommunizierens notwendig:

- Kommentieren bzw. Plausibel-Machen der getroffenen Abschätzung des Gewichtes,
- fehlende Dichte von Gold aus Tabellen entnehmen,
- Kommentieren des Lösungsweges, so dass das Vorgehen verständlich und nachvollziehbar wird,
- Erläutern und verbales Interpretieren formaler Ergebnisse (Was bedeutet beispielsweise ein formal erhaltener Radius von 2,3 cm?).

Spannender wird die Kommunikation zu dieser Aufgabe, wenn sie in Kleingruppen bearbeitet und gemeinsam über verschiedene Lösungswege und Herangehensweisen diskutiert wird. Dabei wird naturgemäß nicht nur die eigene Lösung präsentiert, sondern es wird auch auf die Äußerungen anderer eingegangen. Diese werden möglicherweise sogar bewertet, was kommunikative Kompetenzen bis zum Anforderungsbereich III einbezieht.

Gedanken zur Unterrichtsgestaltung

Wenn auch hier nicht von einer realen oder realitätsnahen Problemstellung gesprochen werden kann, so gibt es doch vielfältige Gemeinsamkeiten von diesem märchenhaften mit einem realem Problem:

- Die Daten sind unvollständig; notwendige Informationen müssen selbst recherchiert und sogar durch Schätzungen/geeignete Messungen selbst herausgefunden werden.
- Mathematisches Wissen allein reicht nicht aus. Physikalische Formeln und die Kenntnis physikalischer Phänomene, also Kenntnisse zu anderen Wissensgebieten, werden erforderlich.
- Mit Routineprozeduren allein kann das Problem auf mathematischer Ebene nicht gelöst werden. Vorhandenes Wissen muss übertragen, verallgemeinert werden.
- Formale Ergebnisse allein sind nicht aussagekräftig. Sie müssen im Kontext gesehen werden werden.

Gehören diese Aktivitäten zum Mathematikunterricht in seiner alltäglichen Form und sind sie nicht nur Highlights in ausgedehnten Projekten, werden sie den Schülern vertraut und sie können entsprechende Kompetenzen entwickeln und z. B. bei dieser Aufgabe demonstrieren. In diesem Fall kann die Aufgabe für eine Rückmeldung erreichter Kompetenzen an die Schüler genutzt werden.

Andernfalls bietet die Aufgabe auch Gelegenheit, Schüler mit Aktivitäten mathematischer Modellierungsprozesse vertraut zu machen, mit ihnen über die Aktivitäten zu reflektieren und sie an möglicherweise „neue“ Anforderungen heranzuführen.

Literatur

A. Büchter, T. Leuders (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen überprüfen. Berlin: Cornelsen.

W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll (2001: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

KMK (2004a): Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. www.kmk.org.

KMK (2004b): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. www.kmk.org.

J. Neubrand (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbständiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim & Berlin: Franzbecker.

M. K. Stein, B. W. Grover, M. Hennigsen (1996): Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical task used in reform classes. American Educational Research Journal 33, 455-488.