Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010, Berlin und Brandenburg, Grundkurs

AUFGABE 1.2 CAS: LÄRMSCHUTZWALL

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3$; $x \in IR$. Ihr Graph ist G.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten des Schnittpunktes von G mit der y-Achse.
Weisen Sie nach, dass G achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des im IV. Quadranten liegenden lokalen Extrempunktes von G und bestimmen Sie dessen Art.
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-3;3]$ in ein Koordinatensystem ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$).
Prüfen Sie rechnerisch, ob das Dreieck, dessen Eckpunkte die lokalen Extrempunkte von G sind, gleichseitig ist.

c) Die beiden Tangenten an den Graphen in den Wendepunkten (Wendetangenten) schließen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

d) Der Punkt $P(x_P \mid y_P)$ sei ein im zweiten Quadranten liegender Punkt von G mit $-\sqrt{3} < x_P < 0$. Der Abstand von P zum Koordinatenursprung O wird mit d bezeichnet.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass d^2 minimal wird und damit auch der Abstand d selbst.

e) Der Graph G und die x-Achse schließen im I. und II. Quadranten eine Fläche vollständig ein ($1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$). Diese Fläche A_L ist die Querschnittsfläche eines Lärmschutzwalls.
Zum Aufschütten des Lärmschutzwalls stehen $1870\,\text{m}^3$ Material zur Verfügung.
Berechnen Sie, wie viel Meter des Walls damit aufgeschüttet werden können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	14	8	6	6	40

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010, Berlin und Brandenburg, Leistungskurs

AUFGABE 1.1 CAS: SKIHALLE

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (x+a) \cdot e^{a-x}$, $x \in IR; a \in IR, a > 0$.
Der Graph der Funktion f_a sei G_a.
In der Anlage sind einige Graphen G_a dargestellt.

f) Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a, die Koordinaten und Art des Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_a in Abhängigkeit vom Parameter a.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
[Kontrollergebnis: $t_a(x) = (-x-a+4) \cdot e^{2a-2}$]

g) Alle Extrempunkte der Graphen G_a liegen auf dem Graphen einer Funktion h.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für h und zeichnen Sie den Graphen von h in das vorhandene Koordinatensystem.

h) Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen f_a die Gleichung $f_a(x) + f_a'(x) = e^{a-x}$ gilt.
Bestimmen Sie allgemein eine Summenformel für $f_a(x) + f_a^{(n)}(x)$ für ungerade n.
Hinweis: $f_a^{(n)}$ ist die n-te Ableitung von f_a.

i) Berechnen Sie den Inhalt der zwischen G_a und der x-Achse liegenden Fläche über dem Intervall $[-a; 2-a]$ sowie den Inhalt der Fläche, die vollständig eingeschlossen wird durch die Wendetangente, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2-a$.
Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen der Schar das Verhältnis der beiden berechneten Flächeninhalte konstant ist.

j) Der Graph der Funktion f_1 beschreibt für $x \geq 0$ im Modell das Profil der Skipiste in einer Skihalle (1 LE = 10 m). Der Hallenboden liegt auf der x-Achse.
Der Querschnitt des Unterbaus der Piste ist ein rechtwinkliges Trapez, das begrenzt wird von den beiden Koordinatenachsen, einer Parallelen zur x-Achse durch den Wendepunkt $W_1(1|2)$ von G_1 und der zugehörigen Wendetangente. Der Raum oberhalb des Unterbaus wird mit Kunstschnee aufgefüllt, bis die gewünschte Profilform der Piste erreicht ist.
Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Kunstschnee für eine Piste von 25 m Breite und einer waagerechten Länge von 60 m hergestellt werden müssen.
Bestimmen Sie das mittlere sowie das maximale Gefälle der Skipiste.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	13	6	6	7	8	40